

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● Arley, Niels, und K. Rander Buch: *Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendung auf Statistik, Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung*. 2. Aufl. Kopenhagen: G. E. C. Gads Forlag 1943. 166 S. u. 17 Fig. [Dänisch].

Abgesehen von kleinen Änderungen unveränderter Abdruck der in dies. Zbl. 23, 337 besprochenen 1. Auflage. Ein auch für nicht der dänischen Sprache mächtige Leser verwendbares Buch. F. Knoll (Wien).

Dumitriu, Anton: *Hasard et science*. Scientia 72, 65—71 (1942).

Nach Ansicht des Verf. bedingt die Auffassung der Wahrscheinlichkeit als Ausdruck unserer Ungewißheit die Voraussetzung der Pseudoidee einer objektiven Realität, die vor der Erfahrung existiert und völlig regulären Gesetzen unterworfen ist. Läßt man diese Voraussetzung fallen, so sind Regularität und Irregularität zwei in gleicher Weise berechnete Möglichkeiten, und deterministische Gesetze und Wahrscheinlichkeitstheorien werden auf der gleichen Ebene betrachtet. Bruno de Finetti (Trieste).

Dehalu, M.: *Sur la démonstration de la formule de K. Pearson dans le cas du schéma simple des urnes*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 11, 146—151 (1942).

Bekanntlich hat K. Pearson für die Binomialverteilung  $(p + q)^m$  näherungsweise die Differentialgleichung

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{q-p} \cdot \frac{x}{x + \frac{2pq(m+1)}{q-p}}$$

aufgestellt und aus dieser eine für große  $m$  und festes  $p, q$  gültige Approximation der Form  $y = y_0 \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{y_0} \cdot e^{-rx}$  gewonnen. Durch Glättung  $[y = (y_{x-1} + y_x)/2]$  und Anwendung der Stirlingschen Formel erhält Verf. unter denselben Bedingungen für die binomische Verteilung die Näherung

$$y = (2(m+1)pq)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{x^2}{2(m+1)pq} + \frac{1}{6} \frac{(q-p)x^3}{(m+1)^2 p^2 q^2} - \frac{1}{16} \frac{(q-p)^2 x^4}{(m+1)^3 p^3 q^3} \right],$$

die sich mit der Pearsonschen asymptotisch identifizieren läßt. M. P. Geppert.

Andersson, W.: *On the Gram series on Pearson's system of frequency functions*. Skand. Aktuarie Tidskr. 1942, 141—149.

Genügt  $\pi(x)$  der Differentialgleichung  $(\ln \pi(x))' = (a+x) : (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$  und definiert man die Polynome  $R_\nu(x)$  durch

$$\pi(x) R_\nu(x) = \prod_{s=\nu+1}^{2\nu} (1 + s b_2)^{-1} \frac{d^\nu}{dx^\nu} [\pi(x) (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)^\nu],$$

so wird zunächst der Ausdruck für die Integrale  $H_\nu = \int \pi(x) [R_\nu(x)]^2 dx$  (Grenzen aus der Theorie von Pearson) ermittelt, die Differentialgleichung, der die Polynome  $R_\nu(x)$  genügen, angegeben; schließlich werden zwei Rekursionsformeln zur Berechnung der  $R_\nu(x)$  angeführt und die Polynome  $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4$  explizit angegeben. F. Knoll.

Selberg, Henrik L.: *Über die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Charliersche Differenzreihen*. Skand. Aktuarie Tidskr. 1942, 228—246.

Nach einer knappen Charakterisierung eines allgemeineren Typus von Charlierschen Polynomen wird für das Paar erzeugender Funktionen:  $f(z) = \sum_{x=0}^{\infty} v(x) z^x$ ,  $g(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \Theta(x) z^x$  zunächst bewiesen, daß unter gewissen Voraussetzungen für  $g(z)$

und, wenn für alle  $k > 0 \lim_{x \rightarrow \infty} x^k 2^x v(x) = 0$  ist,  $v(x)$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ , durch die absolut konvergente Reihe  $v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta^n \Theta(x)$ ,  $c_n = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) v(x)$ ,  $G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{z^x}{g(z)} \right)_{z=1}$  dargestellt werden kann. Unter erweiterten Voraussetzungen über  $g(z)$ , folgt aus der Konvergenz von  $\sum_{x=0}^{\infty} |v(x)| \cdot 3^x$  die Konvergenz von  $\sum_{x=0}^{\infty} |c_n \Delta^n \Theta(x)|$  und die gleichmäßige Konvergenz der obigen Reihe für  $v(x)$ . Weitere Sätze über die Entwicklung von  $v(x)$  müssen in der Arbeit eingesehen werden. Die gewonnenen Sätze werden auf die Entwicklung einer Klasse von (arithmetischen) Verteilungsfunktionen nach  $\Delta^n \Theta(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  angewendet. Anschließend wird eine aus einer Verallgemeinerung der Charlierschen Fehlerhypothese folgende Verteilungsfunktion nach den Funktionen  $\Delta^n \Theta(x)$  entwickelt. F. Knoll (Wien).

**Gumbel, E. J.:** The limiting form of Poisson's distribution. Phys. Rev., II. s. 60, 689—690 (1941).

Die Poisson-Verteilung  $w(x) = a^x \cdot e^{-a} / \Gamma(x+1)$  mit dem Mittelwert  $a$  strebt für groß werdende  $a$  gegen die Normalverteilung  $w(x) = (2\pi a)^{-1/2} \exp\{-(x-a)^2/2a\}$  mit dem Präzisionsmaß  $(2a)^{-1/2}$  und dem Mittelwert  $a$ , wie sich unmittelbar durch Verwendung der Stirlingschen Formel ergibt. Harald Geppert (Berlin).

**Schelling, Hermann von:** Eine Formel für die Teilsummen gewisser hypergeometrischer Reihen und deren Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitstheorie. Naturwiss. 30, 757—758 (1942).

Bedeutet  $F_v(\alpha, \beta, \gamma; x)$  die Summe der ersten  $v$  Glieder der üblichen hypergeometrischen Reihe, so gilt, falls  $\alpha$  ganz und positiv und  $x = 1$  ist, nach Verf. die merkwürdige Beziehung

$$\frac{(\gamma - \beta - 1)(\gamma - \beta - 2) \cdots (\gamma - \beta - \alpha)}{(\gamma - 1)(\gamma - 2) \cdots (\gamma - \alpha)} \cdot F_v(\alpha, \beta, \gamma; 1) + \frac{(\beta + v - 1)(\beta + v - 2) \cdots \beta}{(\gamma - \alpha + v - 1)(\gamma - \alpha + v - 2) \cdots (\gamma - \alpha)} \cdot F_\alpha(v, \gamma - \beta - \alpha, \gamma - \alpha + v; 1) = 1.$$

Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist diese Beziehung besonders wichtig, weil sie bei hypergeometrischen Verteilungen die Bildung der Summenfunktion ermöglicht. So betrachtet Verf. z. B. die Pólya-Pascal-Verteilung, d. h. die Wahrsch.  $w(n)$ , daß nach genau  $n$  Ziehungen aus einer Urne mit weißen und schwarzen Kugeln  $v$  schwarze Kugeln aufgetreten sind, wenn nach jeder Ziehung die gezogene Kugel und zusätzlich  $\Delta$  Kugeln gleicher Farbe in die Urne gelegt werden und zu Anfang  $a$  schwarze,  $b$  weiße ( $a + b = N$ ) Kugeln in der Urne waren:

$$w(n) = \binom{n-1}{v-1} \frac{a(a+\Delta) \cdots (a+(v-1)\Delta) \cdot b(b+\Delta) \cdots (b+(n-v-1)\Delta)}{N(N+\Delta) \cdots (N+(n-1)\Delta)};$$

es gilt dann für die Summenfunktion

$$W(n) = \sum_{i=v}^n w(i) = 1 - \frac{b(b+\Delta) \cdots (b+(n-v)\Delta)}{N(N+\Delta) \cdots (N+(n-v)\Delta)} \cdot F_v\left(n-v+1, \frac{a}{\Delta}, n-v+1 + \frac{N}{\Delta}; 1\right).$$

Auch die Summenfunktion der Bayes-Verteilung ist in ähnlicher Weise zu bilden.

Harald Geppert (Berlin).

**Aldanondo, I.:** Über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Rev. mat. hisp.-amer., IV. s. 2, 232—241 (1942) [Spanisch].

Die Zufallsveränderliche  $x$  nehme die Werte  $0, \dots, \infty$  mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$  an. Mittelwert  $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ , wahrscheinlicher Wert  $(\sqrt{\log 4})$  und mittlere Streuung  $\left(\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}\right)$  werden bestimmt. Ist  $u, v$  der kleinste bzw. größte Wert unter  $n$  unabhängigen Bestimmungen von  $x$ , so ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für



$u$  bzw.  $v$  gegeben durch  $nu \exp\left(-\frac{n}{2} u^2\right)$  bzw.  $nv \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\right)^{n-1}$ . Der Mittelwert  $v_n$  von  $v$  wächst mit  $n$  ins Unendliche:

$$v_n \sim \sqrt{2 \log \left(\frac{n}{\log 2}\right)}.$$

Bei festem  $\varepsilon$  strebt die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung  $|v - v_n| \leq \varepsilon$  mit wachsendem  $n$  gegen 1.

Harald Geppert (Berlin).

**Aldanondo, I.: Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.** Rev. mat. hisp.-amer., IV. s. 3, 62—72 (1943).

Verf. studiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Dichte  $f(x) = \frac{2}{\pi} (1+x^2)^{-2}$  über dem Intervall  $-\infty < x < \infty$ , also der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \{\arctang x + x(1+x^2)^{-1}\}$$

und der charakteristischen Funktion  $\varphi(t) = (1+|t|) \exp(-|t|)$ . Dann bestimmt und vergleicht er die mittleren Streuungen der Schätzungen von  $m$  bei großem  $n$  aus  $n$  Beobachtungen  $x_1, \dots, x_n$  einer Zufallsvariablen  $x$  mit der Dichte  $f(x-m)$  durch das arithmetische Mittel der  $x_i$  bzw. deren Medianwert bzw. nach der Optimalmethode. Schließlich seien  $x'_1, x'_2$  die  $x$ -Werte, von denen aus links bzw. rechts der Bruchteil  $p$  der beobachteten Werte  $x_1, \dots, x_n$  liegt,  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  die Werte, für die  $F(x) = p$  bzw.  $1-p$  wird, und  $n_1, n_2$  die Anzahlen der zwischen  $\bar{x}_1, x'_1$  bzw.  $\bar{x}_2, x'_2$  fallenden Beobachtungswerte; dann entwickelt Verf. das Verteilungsgesetz der Zufallsvariablen  $n_1, n_2$  nebst seinen Eigentümlichkeiten.

Harald Geppert (Berlin).

**Esseen, Carl-Gustav: On the Liapounoff limit of error in the theory of probability.** Ark. Mat. Astron. Fys. 28 A, Nr 9, 1—19 (1942).

Unabhängig von einem allgemeineren Resultat von A. Berry [Trans. Amer. Math. Soc. 49, 122—136 (1941); dies. Zbl. 25, 346—347, insbes. 3., richtigerweise mit  $\sigma^m$  statt  $\sigma$  im Ausdruck für  $\eta$ ] zeigt Verf., daß in der Liapounoffschen Abschätzung für die Abweichung der auf die Streuung 1 normalisierten Summenverteilung unabhängiger Zufallsveränderlichen  $X_1, \dots, X_n$  mit dem Mittelwert Null von der auf Null und Eins reduzierten Normalverteilung  $G(x)$  der Faktor  $\log n$  gestrichen werden kann. Für den speziellen Fall, in welchem die  $X_k$  gleiche Verteilung  $F(x)$  mit den ersten drei Momenten  $m_1 = 0, m_2, m_3$  und ein endliches drittes absolutes Moment besitzen, gilt noch bei nichtperiodischem absoluten Wert der Fourier-Stieltjes-Transformierten von  $F(x)$  für die Verteilungsfunktion von  $(X_1 + \dots + X_n)/n\sqrt{m_2}$  die Entwicklung

$$G(x) + \frac{m_3}{6\sqrt{2\pi n m_2^3}} (1-x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

v. Stachó (Budapest).

**McCrea, W. H., and F. J. W. Whipple: Random paths in two and three dimensions.** Proc. roy. Soc. Edinburgh 60, 281—298 (1940).

The first object of the paper is to give the explicite solution of the difference-equation

$$F(p, q) = \frac{1}{4} [F(p-1, q) + F(p+1, q) + F(p, q-1) + F(p, q+1)] \quad p, q \neq a, b$$

over a rectangular lattice with  $l+2$  rows of  $m+2$  lattice-points, on condition that

$$F(a, b) = 1 + \frac{1}{4} [F(a-1, b) + F(a+1, b) + F(a, b-1) + F(a, b+1)]$$

and  $F(p, q) = 0$  in the boundary points. Various limiting cases of infinite arrays as semi-infinite and infinite strip, infinite quadrant and half-plane are then considered. In the most interesting case of an array filling the whole plane the solution cannot be obtained from the solutions of the simpler cases by formal limiting processes. Here the limit

$$G(s, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - e^{-|s|\mu} \cos t\lambda}{\sinh \mu} d\lambda, \quad \cos \lambda + \cosh \mu = 2$$

of  $F(a, b) - F(p, q)$  for  $l, m, a, b, p, q \rightarrow \infty$ , while  $p - a = s, q - b = t$  remain finite, is calculated. — The extension to three-dimensional lattices is so far remarkable as in the case of a lattice filling all space the function  $F(p, q, r)$  of the finite lattice has finite limit

$$H(s, t, u) = \frac{3}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \cos s \lambda \cos t \mu \frac{e^{-|u|v}}{\sinh v} d\lambda d\mu$$

( $\cos \lambda + \cos \mu + \cosh v = 3$ ) for  $l, m, n, a, b, c, p, q, r \rightarrow \infty, p - a = s, q - b = t, r - c = u$  remaining finite, so that for the simpler infinite arrays the method of images can also be used. v. Stachó (Budapest).

**Popoff, Cirillo: Osservazioni sulla teoria delle probabilità concatenate di Markoff. Caso di una successione continua di prove.** Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 3, 282—292 (1942).

Wir betrachten nach Kolmogoroff (dies. Zbl. 12, 410) folgendes System von  $r^2$  linearen Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{dx_{jk}(t)}{dt} = \sum_{s=1}^r u_{sk}(t) x_{js}, \quad j, k = 1, 2, \dots, r,$$

wo die Koeffizienten  $u_{sk}(t)$  den Bedingungen

$$(2) \quad \sum_{k=1}^r u_{ik}(t) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad u_{jk}(t) \geq 0 \quad \text{für } j \neq k; \quad u_{ii}(t) \leq 0$$

genügen; die  $r^2$  Fundamentallösungen  $x_{j1}(t), x_{j2}(t), \dots, x_{jr}(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) von (1) werden durch folgende Anfangsbedingungen bestimmt:

$$(3) \quad x_{jk}(0) = 0 \quad \text{für } j \neq k, \quad x_{jj}(0) = 1; \quad j, k = 1, 2, \dots, r.$$

Kolmogoroff hat die Gleichungen (1) im Zusammenhange mit einer Frage über verkettete Wahrscheinlichkeiten eingeführt. Es seien  $E_1, E_2, \dots, E_r$   $r$  mögliche Zustände eines Systems  $S$  und  $P_{ik}(s, t)$  die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn  $S$  sich im Augenblicke  $s$  in  $E_i$  befindet,  $S$  im Augenblicke  $t$  ( $s < t$ ) sich in  $E_k$  befinden wird. Dann gilt

$$P_{jk}(s, t) = \sum_{i=1}^r P_{ji}(s, u) P_{ik}(u, t), \quad s < u < t;$$

setzt man

$$u_{ik} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{P_{ik}(t, t + \Delta t) - P_{ik}(t, t)}{\Delta t} \right],$$

so gelten die Gleichungen (1), (2), (3) mit  $x_{jk}(t) = P_{jk}(0, t)$ . Funktionen  $x_{jk}(t)$ , welche den Gleichungen (1), (2), (3) genügen, können keine negativen Werte annehmen. — Verf. zeigt, daß, wenn die  $u_{ik}(t)$  konstant sind, die Lösungen  $x_{jk}(t)$  von (1), unter den Bedingungen (2) und (3), für  $t = +\infty$  bestimmten von  $j$  unabhängigen Grenzwerten  $x_k$  zustreben, die durch die Gleichungen

$$(4) \quad \sum_{k=1}^r u_{kj} \cdot x_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

definiert werden mit der Bedingung, daß  $x_1 + x_2 + \dots + x_r = 1$  ist. Man sagt, daß die Lösungen von (1) dem ergodischen Prinzip genügen. Wenn die Funktionen  $u_{ik}(t)$  nicht konstant sind, wenn sie aber für  $t = +\infty$  bestimmte Grenzwerte  $u_{ik}$  besitzen, so genügen die  $x_{jk}$  wieder dem ergodischen Prinzip; die Grenzwerte  $x_k$  von  $x_{jk}$  für  $t = +\infty$  sind wieder durch die Gleichungen (4) bestimmt, wobei jetzt die  $u_{kj}$  in (4) durch die Grenzwerte  $u_{kj}$  der  $u_{kj}(t)$  zu ersetzen sind. B. Hostinský (Brünn).

## Geometrie.

### Elementargeometrie:

Gheorgiu, Șerban: Sur un théorème de M. Pompeiu. Bul. Politehn., București 12, 221—234 (1941).

Aus der bekannten, in Form einer Ungleichung ausgesprochenen Verschärfung



des ptolomäischen Satzes folgt unmittelbar der planimetrische Satz: Die Abstände eines Punktes von den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks genügen den Dreiecksrelationen, wobei für die Umkreispunkte auch Gleichheit zugelassen wird (s. Hadamard, *Leçons de géométrie élémentaire* I, Paris 1898, ex. 269). Dieser Satz wird durch Verf. und in letzten Jahren auch durch mehrere Autoren mit Berufung auf einen 1936 durch D. Pompeiu mitgeteilten Beweis (dies. Zbl. 14, 272; s. denselben Beweis schon bei Hardy, *A course of pure mathematics*, Cambridge 1925, S. 101, ex. 5) als Satz von Pompeiu angeführt. — Verf. sucht diesen Satz auf Polygone auszudehnen. Er beweist, daß  $n$  Strecken zu einem konvexen Polygon zusammenfügbar sind, wenn keine unter ihnen die Summe der anderen übertrifft. Der zweite Beweis dafür stützt sich auf die falsche Behauptung (S. 226), daß aus  $a_n < a_1 + \dots + a_{n-1}$  die Relation  $\arcsin \frac{a_1}{a_n} + \dots + \arcsin \frac{a_{n-1}}{a_n} > \frac{\pi}{2}$  folgt. — Es wird bewiesen, daß die Abstände  $MA_1, \dots, MA_n$  eines Punktes  $M$  von den Eckpunkten  $A_1, \dots, A_n$  eines regulären  $n$ -Ecks ( $n > 3$ ) die soeben formulierte  $n$ -Eckrelation erfüllen. Es scheint der Aufmerksamkeit des Verf. entgangen zu sein, daß dies einfach (auch für gleichseitige, nichtreguläre  $n$ -Ecke) aus den Dreiecksrelationen

$$MA_1 \leq MA_2 + A_1A_2 = MA_2 + A_3A_4 \leq MA_2 + MA_3 + MA_4$$

folgt. — Die Arbeit schließt mit einem Beweis der trivialen Tatsache, daß nur das gleichseitige Dreieck die obenerwähnte Eigenschaft besitzt. *G. Hajós* (Budapest).

**Casara, Giuseppina:** Un problema archimedeo di terzo grado e le sue soluzioni attraverso i tempi. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 4, 244—262 (1942).

Das Konstruktionsproblem dritter Ordnung, eine die Kugel in zwei Teile mit gegebenem Volumenverhältnis zerschneidende Ebene zu finden, hat in der Geschichte der Mathematik eine ähnliche Rolle gespielt wie die Winkeldrittung und Würfelverdoppelung. Verf. stellt die Ergebnisse zusammen, die auf diesem Gebiet in verschiedenen Zeiten erzielt worden sind. Das Problem stammt von Archimedes und angeblich auch die erste Lösung (durch Schneiden einer Parabel und Hyperbel). Ein anonymen Araber fand eine mechanische Lösung. Huygens hat die Aufgabe durch Winkeldrittung gelöst. Poincaré hat die übrigen Wurzeln der sich ergebenden Gleichung dritter Ordnung geometrisch gedeutet. *G. Hajós* (Budapest).

**Fejes, L.:** Über die dichteste Kugellagerung. *Math. Z.* 48, 676—684 (1943).

Bekanntlich ist die dichteste Packung von Einheitskreisen in der Ebene von selbst gitterförmig, nämlich das bekannte gleichseitige Dreiecksgitter. Hingegen ist die Frage nach der dichtesten Packung gleichgroßer Kugeln im Raume bis heute noch unbeantwortet; man weiß nicht, ob sie gitterförmig ist; die dichteste gitterförmige Kugellagerung hingegen ist bekannt, sie ist rhomboedrisch mit der Dichte  $D_0 = 0,7405$ . Über die größtmögliche Dichte  $D$  einer beliebigen Kugellagerung gewinnt hier Verf. die Aussage (\*)  $D < 0,7546 =$  Quotient aus Inhalt einer Kugel und Inhalt des umschriebenen regulären Dodekaeders. Der geringe Spielraum zwischen den genannten Zahlen sowie weitere Überlegungen des Verf. machen es außerordentlich wahrscheinlich, daß  $D = D_0$  ist, die dichteste Kugellagerung also gitterförmig ist. Den Beweis erläutert Verf. zuerst am Fall der Ebene nach einer schon früher (dies. Zbl. 22, 158) von ihm benutzten Methode. Sind  $P_i$  die Mittelpunkte der Einheitskreise in einer Packung und zieht man die Strecken  $P_iP_k$  ( $k \neq i$ ), errichtet auf ihnen die Mittellote und nimmt den Durchschnitt  $\mathfrak{L}_i$  der von ihnen begrenzten,  $P_i$  enthaltenden Halbebenen, so hat dieser, wie Verf. zeigt, den Flächeninhalt  $T_i \geq 2\sqrt{3}$ , wobei die Gleichheit nur eintritt, wenn  $\mathfrak{L}_i$  ein reguläres Sechseck mit der Mitte  $P_i$  ist, woraus die auf die Ebene bezügliche Behauptung folgt. Im Raume wird die analoge Konstruktion ausgeführt; hier erreicht aber der Inhalt von  $\mathfrak{L}_i$  sein Minimum nicht bei der rhomboedrischen Lagerung, bei der jede Kugel von 12 andern berührt wird und 6 der Berührungspunkte auf einem Großkreis, je 3 weitere auf jeder Seite desselben liegen, sondern dann, wenn  $P_i$  eben-



falls 12 Mittelpunkte benachbart sind, aber in den Ecken eines regulären Ikosaeders liegen,  $\mathfrak{L}_4$  also ein reguläres Dodekaeder wird. Da eine Parkettierung des Raumes mit solchen Dodekaedern nicht möglich ist, steht in (\*) das <-Zeichen. Die räumlichen Maßabschätzungen beim Beweis dieser Minimaleigenschaft des Dodekaeders sind z. T. so unangenehm, daß sich Verf. nur auf die Anschauung verlassen muß.

Harald Geppert (Berlin).

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Vincensini, Paul: Quelques remarques sur certaines caustiques par réflexion et sur le voisinage du second ordre d'un point d'une courbe. Bull. Sci. math., II. s. 66, 155—166 (1942).

An einer in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem eingebetteten Kurve  $C(y=f(x))$  wird das zur  $Y$ -Achse parallele Strahlenbüschel gespiegelt. Die gespiegelten Strahlen umhüllen eine Kurve  $\Gamma$ . Sei  $M$  ein beliebiger Punkt von  $C$ ,  $N$  der auf  $\Gamma$  liegende Punkt, dessen Tangente durch  $M$  geht,  $K$  der zu  $M$  gehörende Krümmungsmittelpunkt,  $H$  der Lotfußpunkt von  $K$  auf die Gerade  $MN$ , dann gilt die Beziehung  $MN = NH$ . Es läßt sich also bei Kenntnis von  $N$  in einfacher Weise  $K$  konstruieren. Seien  $n$  und  $m$  die Lotfußpunkte von  $N$  und  $M$  auf die  $X$ -Achse, so gilt  $\overline{nm} = y' : y''$ . Bezeichnet man ferner mit  $I$  den Schnittpunkt von  $MN$  mit der  $Y$ -Achse, so ist die Lage von  $N$  festgelegt durch die Gleichung  $\overline{MI} : \overline{MN} = xy'' : y'$ . — Verf. betrachtet nun solche Kurven, bei denen  $N$  und daher auch  $K$  leicht zu finden ist. Zu diesen gehören erstens die Kurven, die der Differentialgleichung  $y' : y'' = a$ , zweitens die Kurven, die der Differentialgleichung  $xy'' : y' = k$  genügen. Bekanntlich liefert der erste Fall die Exponentialkurven, der zweite die Kurven  $y = x^\alpha$  mit  $\alpha = k + 1$ , die Verf. mit  $P_\alpha$  bezeichnet und die bei Vertauschung der Koordinatenachsen in  $P_{\frac{1}{\alpha}}$

übergehen. Für diese beiden Arten ergibt sich demnach eine einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes. — Aus  $\overline{MI} : \overline{MN} = \alpha - 1$  läßt sich umgekehrt bei Angabe des Krümmungsmittelpunktes  $K$  für einen Punkt  $M$  auf  $P_\alpha$  und der Richtung der  $Y$ -Achse die  $Y$ -Achse offenbar selbst finden. Ebenso erhält man die  $X$ -Achse durch Vertauschung der Achsen, wobei  $\alpha$  in  $\frac{1}{\alpha}$  übergeht, also  $\overline{MJ} : \overline{MN} = \frac{1}{\alpha} - 1$  gilt,

wenn  $J$  der Schnittpunkt von  $MN$  mit der  $X$ -Achse ist. — Sei nun von einer beliebigen Kurve  $C$  für einen Punkt  $M$  der Krümmungsmittelpunkt  $K$  gegeben und die Aufgabe gestellt, alle Kurven  $P_\alpha$  ( $\alpha$  fest) zu finden, die mit  $C$  ein Element zweiter Ordnung gemeinsam haben, so läßt sich leicht nachweisen, daß die Achsen dieser Kurven zwei dreispitzige Hypozykloiden einhüllen, die einander in einer Ähnlichkeit mit dem Zentrum  $M$  und dem Verhältnis  $-\alpha$  entsprechen. Für  $\alpha = -1$  fallen die beiden Hypozykloiden zusammen und sind identisch mit der Steinerschen Hypozykloide des unendlich kleinen durch  $M$  und zwei benachbarte Kurvenpunkte  $M'$  und  $M''$  aufgespannten Dreiecks. Die Mittelpunkte der Kurven  $P_\alpha$  ( $\alpha$  fest), die  $C$  in  $M$  von der zweiten Ordnung berühren, liegen, wie leicht zu zeigen ist, auf einer bizirkularen Kurve vierter Ordnung, die symmetrisch zur Normalen in  $M$  liegt und die Tangente in  $M$  zur Doppeltangente hat.

A. Klingst (Wien).

Morelli, Carlo: Estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 608—618 (1942).

Für kleine krummlinige Dreiecke auf einer beliebigen Fläche ist der Sinussatz bis zu Gliedern 3. Ordnung einschließlich in den Seitenlängen von Tonolo (dies. Zbl. 23, 267) übertragen worden. Eine Verschärfung auf Glieder 4. Ordnung ist nicht möglich, dagegen läßt sich eine solche beim cos-Satz erreichen und damit die Trigonometrie solcher Dreiecke bis zur 4. Ordnung ausgestalten. Sind  $l_h$  ( $h = 1, 2, 3$ ) die auf der Fläche gemessenen Längen der Dreiecksseiten,  $\varphi_h$  die von ihnen gebildeten Winkel,  $\gamma_h$  und  $k_h = R_h^{-2}$  die geodätischen Krümmungen der Seiten bzw. die Gaußschen



Krümmungsmaße, gebildet in den Seitenmitten, und bedeutet die Ableitung nach der Bogenlänge, so lautet diese Verschärfung

$$\cos \frac{l_h}{R_h} = \cos \frac{l_{h+1}}{R_{h+1}} \cos \frac{l_{h+2}}{R_{h+2}} + \sin \frac{l_{h+1}}{R_{h+1}} \sin \frac{l_{h+2}}{R_{h+2}} \cos \varphi_h + \psi_h - \chi_h \left(1 + \frac{1}{3} \cos \varphi_h\right) + \\ + \left( \omega_h \sin \varphi_h - \frac{1}{4} \gamma_{h+1} \gamma_{h+2} l_{h+1} l_{h+2} \right) \frac{l_{h+1}}{R_{h+1}} \cdot \frac{l_{h+2}}{R_{h+2}},$$

worin  $\omega_h$ ,  $\chi_h$ ,  $\psi_h$  die folgenden Korrekturgrößen bezeichnen:

$$\omega_h = \frac{1}{2} (\gamma_{h+1} l_{h+1} - \gamma_{h+2} l_{h+2}) + \frac{1}{12} (\dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 - \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2),$$

$$\chi_h = \frac{1}{8} (\gamma_{h+1}^2 l_{h+1}^2 + \gamma_{h+2}^2 l_{h+2}^2) \frac{l_{h+1}}{R_{h+1}} \cdot \frac{l_{h+2}}{R_{h+2}},$$

$$\psi_h = \frac{1}{24} (k_{h+1} \gamma_{h+1}^2 l_{h+1}^4 + k_{h+2} \gamma_{h+2}^2 l_{h+2}^4 - k_h \gamma_h^2 l_h^4).$$

Die Rechnung erfolgt in naheliegender Weise über das geodätische Dreieck mit den gleichen Ecken.

Harald Geppert (Berlin).

**Boaga, Giovanni:** Il trasporto delle coordinate curvilinee lungo un arco di geodetica in alcuni casi particolari interessanti la geodesia. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 75, 649—656 (1942).

Levi-Civita und Tonolo [dies. Zbl. 22, 395: 23, 267; Atti Accad. Italia, Rend., VI. s. 29, 573—580 (1939)] haben die Formeln für den Transport der krummlinigen Koordinaten längs einer beliebigen Kurve auf einer allgemeinen differentialgeometrischen Fläche behandelt, wobei Tonolo gleichzeitig die Anwendungen auf das Erdellipsoid ins Auge faßte. Verf. behandelt die gleiche Frage des Transports der krummlinigen Koordinaten für den Sonderfall der Verschiebung längs eines geodätischen Kurvenbogens. Den allgemeinen Formeln folgt die Anwendung auf einige für die Geodäsie interessante Sonderfälle, insbesondere den Transport der isothermen Koordinaten auf einem Drehellipsoid.

Harald Geppert (Berlin).

**Giambusso, Vincenzo:** Linee geografiche su un ellissoide a tre assi. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 441—446 (1942).

L'extension aux surfaces régulières quelconques (non développables) de la notion de coordonnées géographiques, outre qu'elle est importante en elle-même du point de vue géométrique, devient nécessaire en géodésie théorique, surtout à l'heure actuelle où l'on réduit le géoïde à un ellipsoïde à 3 axes quelconques, au lieu de l'ellipsoïde de révolution habituel. L'auteur donne des définitions nouvelles de la latitude et de la longitude, de la droite cardinale nord-sud ou est-ouest et des méridiens de première, deuxième, troisième espèce et des parallèles de première, deuxième, troisième espèce. Il détermine sans difficulté ces courbes sur l'ellipsoïde général.

B. Gambier (Paris).

**Myller, A.:** Eine geometrische Transformation. Gaz. mat. 48, 297—299 (1943) [Rumänisch].

**Mineo, Corradino:** Superficie dotate di  $\infty^1$  geodetiche che sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 175—182 (1942).

Considérons une surface  $S$  et sa représentation sphérique  $s$  au sens de Gauss: la direction fixe  $r$  de l'énoncé est prise pour axe  $Oz$ ; un point de  $s$  a pour coordonnées  $(\cos \varphi \cos \omega, \cos \varphi \sin \omega, \sin \varphi)$ ; la troisième forme de  $S$  est  $d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\omega^2$ ;  $\varphi, \omega$  sont la latitude et la longitude des points correspondants de  $S$  et  $s$ ; la tangente au méridien de  $s$ , reportée parallèlement dans le plan tangent de  $S$  donne la direction nord-sud au point correspondant  $P$  de  $S$ ; la tangente au parallèle de  $s$  donne de même la direction est-ouest. Cela posé, une géodésique  $g$  de  $S$ , si elle est hélice sur un cylindre de génératrices orthogonales à  $r$ , est ligne d'égale longitude (pour la direction  $r$ ) et réciproquement, ou encore trajectoire isogonale des lignes est-ouest ou nord-sud de  $S$  et réciproquement. Analytiquement, il faut déterminer la seconde forme  $Dd\varphi^2 + 2D'd\varphi d\omega + D''d\omega^2$ , d'où les équations de Mainardi-Codazzi

$$\frac{\partial D}{\partial \omega} - \frac{\partial D'}{\partial \varphi} + D' \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad \frac{\partial D''}{\partial \omega} - \frac{\partial D'}{\partial \varphi} + D \sin \varphi \cos \varphi + D'' \operatorname{tg} \varphi = 0$$



(en rectifiant la faute d'impression  $\frac{\partial D}{\partial \varphi}$  de la première) et l'équation complémentaire, spéciale au problème actuel,  $-D' \frac{\partial D}{\partial \varphi} + 2D \frac{\partial D'}{\partial \varphi} - D \frac{\partial D}{\partial \omega} = 0$ . On trouve trois solutions: d'abord les surfaces moulure-cylindriques de Monge ( $D' = 0$ ), puis des surfaces réglées où les géodésiques  $\omega$  sont rectilignes, puis la solution nouvelle, où  $DD' \neq 0$ , obtenue avec les formules

$$D' = \frac{f(\omega)}{\cos \varphi} e^{\theta(u)}, \quad D = \frac{e^{\theta(u)}}{\cos^2 \varphi}, \quad D' = \cos \varphi \left[ g(\omega) + \int \frac{e^{\theta(u)}}{\cos^2 \varphi} [\theta'(u) f^2(\omega) + f'(\omega) - \sin \varphi] d\varphi \right],$$

où  $f(\omega)$ ,  $g(\omega)$  sont deux fonctions arbitraires de  $\omega$ , et  $\theta$  une fonction arbitraire de l'argument  $u = \log \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} + \int f(\omega) d\omega$ . L'auteur étudiera ces surfaces  $S$  dans une note prochaine.

B. Gambier (Paris).

**Anas, Mehmet:** Surfaces dont le second beltramién relatif à la courbure moyenne est nul. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul 6, 154—188 (1942).

Soit  $J$  la courbure moyenne d'une surface. L'équation

$$(1) \quad \Delta_2 J = a^{\lambda\mu} V_\mu J_\lambda = 0 \quad (J_\mu = \partial_\mu J)$$

se réduit pour des lignes paramétriques isotropes à  $\frac{\partial^2 J}{\partial u \partial v} = 0$ . Cette équation conduit (moyennant les équations fondamentales) à une équation aux dérivées partielles où entrent quatre fonctions arbitraires d'une seule variable. L'auteur s'en sert pour trouver toutes les surfaces (1) développables (cylindre et cône y compris). La condition nécessaire et suffisante pour que (1) soit une surface de révolution est que (2)  $J^\alpha J_{[\lambda} b_{\mu]\alpha} = 0$ , c'est-à-dire que les courbes  $J = \text{const.}$  soient des lignes de courbure. [Ici  $b_{\lambda\mu}$  est le second tenseur fondamental. L'auteur se sert de la notation de Weatherburn et écrit  $VJ \times \overline{V}J = 0$  au lieu de (2).] Parmi les surfaces, sur lesquelles les courbes  $J = \text{const.}$  coupent les lignes de courbure sous un angle constant, il n'y a que des surfaces de révolution qui satisfont à (1). — Tous les invariants de la surface (1) peuvent s'exprimer moyennant  $J$ ,  $J_\mu$  et  $J^\lambda b_{\mu\lambda}$  (normal au vecteur conjugué de  $J_\mu$ ). En particulier les lignes de courbure ou bien les asymptotiques peuvent être exprimées au moyen de ces expressions.

Hlavatý (Prag).

**Vincensini, Paul:** Sur certaines surfaces à lignes de courbure planes. Ann. École norm., III. s. 59, 141—164 (1942).

L'auteur traite un cas particulier du problème traité par Darboux: surfaces  $S$  à lignes de courbure planes dans les deux systèmes; Darboux a montré que l'on obtient ces surfaces en considérant deux coniques focales ( $C_1$ ), ( $C_2$ ), une sphère mobile dont le centre  $C_i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) décrit ( $C_i$ ), le rayon  $R_i$  correspondant à  $C_i$  d'après une loi arbitraire; le plan radical d'une sphère  $C_1$  et d'une sphère  $C_2$  enveloppe  $S$ ; le point de contact est le centre radical de  $C_1$ ,  $C_2$  et des deux sphères  $C'_1$ ,  $C'_2$  infiniment voisines de  $C_1$ ,  $C_2$  respectivement; le plan radical de  $C_i$ ,  $C'_i$  est le plan d'une ligne de courbure. L'auteur introduit la condition supplémentaire que la développée moyenne de  $S$  soit un plan (développée moyenne signifie surface lieu du milieu du segment réunissant deux centres de courbure principaux associés). Les surfaces en jeu s'obtiennent sans quadrature et se rattachent aux surfaces minima d'O. Bonnet, dont les lignes de courbure ont pour image deux familles orthogonales de cercles; on obtient ainsi  $\infty^3$  familles de surfaces parallèles. L'auteur détermine dans chaque famille les surfaces où, de plus, l'une des nappes de la développée se réduit à une courbe: la surface  $S$  est alors enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre et conduit à de nombreuses propriétés géométriques, remarquables par leur élégance. — L'auteur traite ensuite un problème différent: trouver les surfaces enveloppes de sphères à un paramètre telles que le lieu géométrique du point partageant dans un rapport  $k$  donné le segment réunissant les centres de courbure associés soit un plan (le problème précédent se rapporte à  $k = -1$ ). Ce problème conduit à envisager plus généralement les surfaces admettant un réseau conjugué formé de lignes planes et de lignes géodésiques: ces surfaces sont les nappes



focales (relatives aux lignes de courbure planes) des surfaces admettant un système de lignes de courbure situées dans des plans parallèles à une direction de droite fixe. La solution n'exige que des quadratures. Les propriétés géométriques sont nombreuses et exposées avec une clarté et une élégance remarquables. Un mémoire prochain donnera quelques aperçus nouveaux sur ces sujets.

B. Gambier (Paris).

**Bieri, Hans: Invariante Herleitung der Differentialgleichungen für 3-fache Orthogonalsysteme.** Comment. math. helv. 15, 287—295 (1943).

Verf. bezieht die Flächen eines Systems von dreifach orthogonalen Flächenscharen, die sich bekanntlich gegenseitig in ihren Krümmungslinien schneiden, auf das Netz dieser Krümmungslinien als Parameterlinien und wählt als Parameter die Bogenlänge. Unter dieser Voraussetzung treten als Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen des begleitenden Dreikants längs der Parameterkurven nur die Werte der Hauptkrümmungen und geodätischen Krümmungen längs dieser Kurven auf. Ferner ergibt sich der bemerkenswerte Satz: Im dreifachen Orthogonalsystem ist die Hauptkrümmung einer beliebig herausgegriffenen Fläche längs jeder ihrer Krümmungslinien gleich der geodätischen Krümmung dieser Kurve in jener anderen eindeutig bestimmten Fläche, der sie noch angehört.

Klingst (Wien).

**Long, Louis: Recherches de géométrie infinitésimale.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 10, 381—388 (1941).

Sind  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) die Koordinaten einer Fläche ( $A$ ), bezogen auf ihre Krümmungslinien, dann genügen dieselben einer Laplaceschen Differentialgleichung von der Form (1)  $\vartheta_{uv} = \frac{p_v}{p} \vartheta_u + \frac{r_u}{r} \vartheta_v$ ; (1) läßt dann bekanntlich 5 Lösungen  $\vartheta_i$  mit der Bedingung  $\sum_{i=1}^5 \vartheta_i^2 = 0$  zu, und es gilt auch die Umkehrung. Setzt man  $\vartheta = r x_i$ , so geht (1) über in

$$(2) \quad x_{uv} = \frac{a'_v}{a'} x_u + b_1 x, \quad (3) \quad a' = \frac{p}{r} U(u),$$

$$(4) \quad b_1 = \frac{1}{r} \left( -r_{uv} + \frac{p_v}{p} r_u + \frac{r_u}{r} r_v \right).$$

Verf. betrachtet nun im fünfdimensionalen Raum die Flächen ( $B$ ), deren Koordinaten  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) Lösungen von (2) und außerdem durch die Beziehung  $\sum x_i^2 = 0$  verbunden sind. — Die Formeln (3) und (4) geben dann den Übergang von den Flächen ( $B$ ) zu den Flächen ( $A$ ). Es werden zehn Hilfsgrößen eingeführt, für die sich neun Beziehungen ergeben. Es kann also für die Flächen ( $B$ ) noch eine willkürliche festgesetzt werden. Verf. betrachtet den Fall, daß  $a' = a$  wird.  $a = 1$  führt auf die Isothermenflächen; zwei weitere Fälle führen auf Flächen, deren korrespondierende Flächen ( $A$ ) durch die Gleichung  $r_u = pr$  gekennzeichnet sind. Es sind Flächen, für die das Produkt des Krümmungsradius mit dem Radius der geodätischen Krümmung des sphärischen Bildes (je für die  $v$ -Kurven) konstant ist (vgl. dies. Zbl. 13, 323). Volk.

**Unger, Georg: Krümmungsfeste und wackelige Kurvennetze bei infinitesimalen Verbiegungen als Analoga zu den Asymptotenlinien und konjugierten Netzen.** Zürich: Diss. 1941. 65 S.

Ce travail, présenté comme thèse à Zurich, est une étude puissante de la déformation infiniment petite des surfaces. Comme Bianchi, l'auteur considère la variation de la seconde forme fondamentale pendant la déformation infiniment petite. De même que la courbure normale d'une courbe quelconque de la surface est représentée par le quotient de la seconde forme fondamentale par la première, la variation dans la déformation infiniment petite de la courbure normale est représentée par une fraction de même dénominateur, mais où le numérateur est une autre forme quadratique différentielle; en chaque point de la surface, on définit ainsi les deux directions de courbure normale fixe (analogues aux directions asymptotiques): elles sont les éléments doubles d'une involution concernant deux directions conjuguées en déformation et l'on définit ainsi



une indicatrice de déformation analogue à celle de Dupin; les bissectrices des directions précédentes (analogues aux directions principales) donnent les variations, maxima ou minima, de variation de courbure normale. L'au. étudie ensuite une notion, due à Sretensky, généralisation de la notion de directions conjuguées au sens de Dupin: on considère, pour chaque point  $(u, v)$ , une sphère de rayon  $a(u, v)$  tangente en ce point à la surface (pour Dupin  $a$  est infini) et l'on prend l'enveloppe de la famille de sphères à un paramètre obtenues en suivant une courbe de la surface; le cercle limite de la sphère tangente en  $(u, v)$  étant connu, on mène au point  $(u, v)$  la tangente parallèle au plan de ce cercle qui est dite sphériquement conjuguée au déplacement en jeu: pour un réseau quelconque donné a priori sur la surface correspond un système et un seul de sphères pour lesquelles le réseau est sphériquement conjugué ( $a = \infty$  fournit les directions asymptotiques); les réseaux conjugués par rapport aux directions de courbure normale fixe indiqués plus haut sont les seuls qui, dans une déformation infiniment petite, restent sphériquement conjugués pour la famille de sphères en jeu, dont le rayon  $a$  reste constant en chaque point au cours de la déformation infiniment petite. L'au. signale ensuite les surfaces réglées qui, liées à la surface pendant la déformation infiniment petite, non seulement conservent le même paramètre de distribution, mais sont déformées en même temps que la surface. Le premier chapitre traite de courbes et bandes de contact étudiées au point de vue de la déformation infiniment petite de façon à acquérir les notions propres à développer les résultats exposés ci-dessus. Il s'agit ici d'un travail puissant, qui pourrait peut-être contenir moins de calculs et davantage de considérations géométriques. *B. Gambier.*

**Biran, Lutfi:** Les surfaces réglées étudiées en analogie avec les courbes gauches. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul 6, 121—134 (1942).

Die Differentialgeometrie der Regelflächen wurde mittels Studys dualer Vektoren von Blaschke entwickelt (Differentialgeometrie I, Berlin 1930). Verf. geht aus von den Blaschkeschen Ableitungsgleichungen und wählt als Parameter die Bogenlänge der Striktionslinie. Dadurch nehmen die Gleichungen die Form der Frenetschen Formeln für Raumkurven an mit dem einzigen Unterschied, daß die verschiedenen Größen hier duale Zahlen darstellen. In Anlehnung an diese Analogie bezeichnet Verf. die beiden Invarianten als duale Krümmung  $P$  und duale Torsion  $Q$  und beweist, daß diese beiden dualen Invarianten die natürlichen Gleichungen der Regelfläche geben [mit gewissen Ausnahmen; Anm. d. Ref., man vgl. hierzu: Mühlendyck, S.-B. Berliner math. Ges. 40/41, 29—37 (1942); vgl. nachst. Ref.]. — In Analogie zur Kurventheorie bestimmt Verf. Regelflächen mit gemeinsamen „Hauptnormalen“. Im Gegensatz zu den Raumkurven mit gemeinsamen Hauptnormalen kann hier eine Regelfläche willkürlich vorgegeben werden. Ist für eine Regelfläche die duale Krümmung konstant, so ist die Striktionslinie eine Bertrandsche Kurve, ferner sind die durch gemeinsame Hauptnormalen zugeordneten Regelflächen „Bertrand'sche Flächen, d. h. zwischen dualer Krümmung und Torsion besteht eine lineare Beziehung. Verf. behandelt ferner die Flächen, für die  $P/Q = \text{konst.}$ ; bzw.  $P^2 + Q^2 = \text{konst.}$  sind. *W. Haack.*

**Mühlendyck †, O.:** Zur Theorie der analytischen Regelscharen. S.-B. Berlin. math. Ges. 40/41, 29—37 (1942).

Im ersten Abschnitt werden die analytischen Regelscharen in 13 Familien eingeteilt derart, daß jede analytische Regelschar zu einer und nur einer Familie gehört. Für elf dieser Familien sind die natürlichen Gleichungen bekannt; für die zwei übrigen, „Minimalgeradenscharen veränderlicher Steigung“ und „nichtsphärische windschiefe Minimalgeradenscharen fester Steigung“ bestimmt Verf. ein begleitendes Dreibein und ein vollständiges System von Invarianten (natürliche Gleichungen). Bei der ersten Familie wird die Steigung, d. i. die einzige Differentialinvariante zweier konsekutiver Minimalgeraden als Parameter und der „Nabelpunkt“ der Erzeugenden als Anfangspunkt des begleitenden Dreibeins eingeführt. Die Geradenschar besitzt zwei unabhängige Invarianten. — Jede Regelschar der zweiten Familie liegt auf einer Serret-



schen Fläche. Die krummen Haupttangentenkurven dieser Flächen haben gleiche Bogenlänge, die als invarianter Parameter der Geradenschar eingeführt wird. Eine solche Schar ist durch eine Invariante als Funktion des ausgezeichneten Parameters bestimmt.

*Haack* (Karlsruhe).

### **Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:**

**Godeaux, Lucien:** Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 27, 487—498 (1941).

Nachdem Verf. früher die Flächen ( $x$ ) untersucht hat, deren  $Lie-F_2$  nur zwei oder drei charakteristische Punkte besitzen (vgl. dies. Zbl. 26, 150), behandelt er jetzt den Fall von fünf charakteristischen Punkten, nämlich dem Flächenpunkt  $x$  und den Ecken des Demoulinischen Vierseits  $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ . Es werden die Strahlensysteme  $r_{ik} = x x_{ik}$  der Verbindungsgeraden der Punkte  $x$  und  $x_{ik}$  und die Strahlensysteme  $s_{ik}$  der Schnittgeraden der Tangentenebenen in  $x$  und  $x_{ik}$  untersucht. Wenn die Brennebenen von  $r_{ik}$  durch die Brennpunkte von  $s_{ik}$  gehen, so gelangt man zu den Projektiv-Minimalflächen. Entsprechen die Torsen eines Systems, etwa  $r_{11}$ , den Asymptotenlinien von  $x$ , dann tun es auch die Torsen von  $r_{22}, r_{12}, r_{21}$ . Schließlich werden die Laplaceschen Folgen der Brennpunkte der Systeme  $s_{12}$  und  $s_{21}$  betrachtet und gezeigt, daß sie den durch  $r_{11}, r_{22}$  bestimmten Folgen einbeschrieben sind. *W. Haack.*

**Buzano, Piero:** Sulle calotte del 2° ordine appartenenti a una data striscia. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 485—492 (1942).

Unter Heranziehung neuerer Untersuchungen von Bompiani in der Theorie der Kurvenelemente (vgl. dies. Zbl. 26, 83) stellt Verf. den projektiven Charakter des folgenden, auf partielle Differentialgleichungen in zwei Variablen bezüglichen Satzes von Sannia [C. R. Acad. Sci., Paris 155, 636—638 (1912); 156, 605—608 (1913)] heraus: Das Doppelverhältnis der Normalkrümmungen der Schnitte von vier durch die gleiche Charakteristik gehenden Integralfächen mit einem Büschel paralleler Ebenen ist längs der ganzen Charakteristik konstant. — Dazu betrachtet Verf. einen Streifen, d. h. ein einparametrisches System von Elementen erster Ordnung, deren jedes aus einer Ebene (Seite) und einem darauf liegenden Punkt (Zentrum) besteht und das von der Art ist, daß jede Seite die Verbindungsgerade ihres Zentrums mit dem unendlich benachbarten Zentrum enthält. Die Gesamtheit aller Kalotten zweiter Ordnung, die dem Streifen angehören, hängt von einer willkürlichen Funktion  $t(x)$  ab, und die Kalotten mit gegebenem Zentrum bilden ein Büschel. Bei der von Bompiani (vgl. dies. Zbl. 26, 83) angegebenen Abbildung der Kalotten mit gegebenem Zentrum und vorgegebener Berührungsebene auf die Punkte eines  $S_3$ , dessen absolutes Gebilde aus einem quadratischen Kegel  $T$  und einer nicht durch seine Spitze gehenden Ebene  $\omega$  besteht, bildet sich jenes Büschel auf eine Gerade ab, die  $T$  berührt. Gibt man vier Kalotten, die dem Streifen angehören und das gleiche Zentrum haben, vor, so ist das Doppelverhältnis ihrer vier Bildpunkte, die ja auf einer Geraden liegen, eine projektive Berührungsinvariante der vier Kalotten. Diese Invariante (das sogenannte Doppelverhältnis der vier Kalotten) ist gleich dem Doppelverhältnis der Krümmungen der mittels ein und derselben Ebene erzeugten Normalschnitte der vier Kalotten und fällt daher mit dem Doppelverhältnis des Sanniaschen Satzes zusammen. Gibt man vier Funktionen  $t_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  vor, so erhält man zu jedem Werte von  $x$  vier Kalotten des Streifens mit dem gleichen Zentrum, und daher ist das Doppelverhältnis der vier Kalotten eine Funktion von  $x$ . Verf. zeigt, daß, damit dieses Doppelverhältnis bei Bewegung des Zentrums konstant sei, notwendig ist, daß die Funktionen  $t_i(x)$  Integrale einer Riccatischen Differentialgleichung  $t' = At^2 + Bt + C$  sind, was speziell in dem von Sannia untersuchten Falle eintritt. Schließlich beschäftigt sich Verf. mit einem Spezialfalle, in dem das genannte Doppelverhältnis sich auf die bekannte Mehmkesche Invariante zweier einander berührender Kalotten zweiter Ordnung reduziert.

*Mario Villa* (Bologna).



**Rozet, O.:** Sur la théorie des surfaces et les congruences de sphères. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **11**, 630—634 (1942).

Dans un espace euclidien à trois dimensions  $S_3$ , la transformation de Lie fait correspondre à l'ensemble des droites tangentes à une surface l'ensemble des sphères tangentes à une autre surface. Parallèlement à l'étude des surfaces considérées comme lieu de leurs tangentes, on peut donc faire l'étude d'une surface comme nappe focale d'une congruence de sphères et utiliser la représentation des sphères de  $S_3$  sur une hyperquadrique d'un espace  $S_5$ . L'auteur utilise ce procédé; il rapporte une surface  $(M)$  à ses lignes de courbure  $(u, v)$ ;  $(M_1, R_1)$ ,  $(M_2, R_2)$  désignent les centres et rayons de courbure principaux. L'hyperquadrique  $\Omega$  contient les points représentatifs  $U, V$  des sphères de centre  $M_1$  ou  $M_2$  passant en  $M$ ; la droite  $UV$  appartient à  $\Omega$ ;  $U, V$  décrivent sur  $\Omega$  des réseaux et sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\dots, U_n, \dots, U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$$

chaque terme étant le transformé du précédent dans le sens des  $u$ . Les équations de Laplace correspondantes ne dépendent que de  $R_1, R_2$  et de leurs dérivées en  $u, v$ .

*B. Gambier (Paris).*

**Haantjes, J.:** Conformal differential geometry. 3. Surfaces in three-dimensional space. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 836—841 (1942).

Il presente lavoro fa seguito a due precedenti (questo Zbl. **25**, 365; **26**, 353) sulla geometria differenziale conforme delle curve e riguarda lo studio analogo per una superficie  $S$  di uno spazio  $R_3$ . Le proprietà che vengono prese in considerazione sono quelle invarianti rispetto alle trasformazioni (conformi)  $g'_{hi} = \sigma^2 g_{hi}$  del tensore fondamentale di  $R_3$ , con  $\partial_j s_i = s_i s_j - \frac{1}{2} g_{ji} s_h s^h$  ( $s_i = \partial_i \log \sigma$ ,  $s^h = g^{hi} s_i$ ). — Si introducono un tensore ed una connessione conforme in  $R_3$  e in corrispondenza si determinano su  $S$  due tensori conformi invarianti  $A_{\alpha\beta}$ ,  $H_{\alpha\beta}$  (primo e secondo tensore fondamentale) e una connessione conforme (cfr. J. A. Schouten, Der Ricci Kalkül, Berlin 1924, 5° cap. e J. A. Schouten-D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I, p. 93, Groningen 1935; questo Zbl. **11**, 174). Le linee  $H_{\alpha\beta} du^\alpha dv^\beta = 0$  formano su  $S$  un doppio sistema ortogonale e sono caratterizzate geometricamente così: le tangenti ad esse in ogni punto  $P$  di  $S$  sono le tangenti alla linea comune ad  $S$  ed alla „sfera centrale“ (tangente in  $P$  ad  $S$  ed avente la curvatura uguale alla curvatura media di  $S$  in  $P$ ). La forma quadratica  $A_{\alpha\beta} du^\alpha dv^\beta$  può interpretarsi geometricamente come il quadrato dell'angolo fra la sfera centrale in  $u^\alpha$  e quella in  $u^\alpha + du^\alpha$ .

*Maxia (Roma).*

**Haantjes, J.:** Conformal differential geometry. 4. Surfaces in three-dimensional space. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 918—923 (1942).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (dies. Zbl. **25**, 365; **26**, 353; vorst. Ref.) führt Verf. neben den Tensoren  $A_{\alpha\beta}$  und  $H_{\alpha\beta}$  einen dritten Fundamentaltensor  $V_{\alpha\beta}$  ein und bestimmt für die Fläche  $S$  das Analogon der Gaußschen und Codazzischen Gleichungen. Es folgt daraus, daß die Tensoren  $A_{\alpha\beta}$ ,  $H_{\alpha\beta}$ ,  $V_{\alpha\beta}$  die Fläche bis auf konforme Transformationen eindeutig festlegen. — Ferner wird in jedem Punkte von  $S$  der Normalkreis (vgl. T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen I, Tokyo 1938; dies. Zbl. **19**, 44) betrachtet und bewiesen, daß für die konform-geodätischen Linien auf  $S$  der Schmiegungskreis und der Normalkreis von  $S$  in jedem Punkte einer Kugel angehören. Die Flächen, deren Normalkreise durch einen festen Punkt laufen, werden bis auf konforme Transformationen durch die Gleichung  $\kappa_1 - \kappa_2 = \text{konst.}$  bestimmt, in der  $\kappa_1, \kappa_2$  die Hauptkrümmungen von  $S$  bezeichnen. *Maxia (Roma).*

**Villa, Mario:** Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. 1. Le proiettività caratteristiche. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. **3**, 718—724 (1942).

Bekanntlich gehen bei einer Punkttransformation zwischen zwei Ebenen  $\pi$  und  $\pi'$  durch ein reguläres Paar entsprechender Punkte  $O, O'$  je drei charakteristische oder



Wenderichtungen derart, daß einem Wendeelement in einer dieser Richtungen wieder ein Wendeelement in der entsprechenden Richtung zugeordnet wird. Verf. findet darüber hinaus, daß die Abbildung eine Projektivität zwischen entsprechenden charakteristischen Richtungen bestimmt und daß, wenn die charakteristischen Richtungen und die zu ihnen gehörigen charakteristischen Projektivitäten im Punktepaar  $O, O'$  bekannt sind, die Abbildung bis zur Umgebung zweiter Ordnung von  $O$  und  $O'$  eindeutig festgelegt ist. Weiterhin gibt es  $\infty^2$  quadratische Cremonatransformationen, die die gegebene Punkttransformation im Punktepaar  $O, O'$  schmiegen, d. h. mit ihr bis zur Umgebung zweiter Ordnung übereinstimmen; ihre Konstruktion wird angegeben. Hingegen gibt es keine Cremonatransformation dritter Ordnung und allgemeiner Jonquièrstransformationen, die die gegebene Punkttransformation bis zur Umgebung dritter Ordnung von  $O$  und  $O'$  schmiegen. Verf. benutzt bei seiner Ableitung in geeigneter Weise die  $V_6^4$  des  $S_8$ , die die Punktepaare der beiden Ebenen abbildet; auf ihr entspricht der Punkttransformation eine Fläche, deren Untersuchung derjenigen der Transformation gleichwertig ist.

*E. Bompiani (Roma).*

**Villa, Mario:** Sull'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di  $m$  funzioni in  $n$  variabili. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 209—216 (1942).

Vorgelegt sei das Gleichungssystem

$$(1) \quad y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, m \leq n.$$

Darin werden die  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) als Punktkoordinaten eines projektiven Raumes  $S_n$  und die  $y_i$  als Punktkoordinaten eines ebensolchen  $S_m$  gedeutet. Dann definieren die Gleichungen (1) eine  $V_n$  im  $S_m$  und eine Korrespondenz  $T$  zwischen ihren Punkten und denen des  $S_n$ . Bekanntlich bilden sich die Punktepaare von  $S_m$  und  $S_n$  auf eine Segremannigfaltigkeit  $W$  der Dimension  $m + n$  und der Ordnung  $\frac{(m+n)!}{m!n!}$  in einem

Raume  $S_{m+n+m+n}$  ab, und dabei entspricht der  $T$  eine  $\bar{V}_n$  auf  $W$ , deren allgemeiner Punkt  $P$  Bildpunkt des Punktes  $P_1$  aus  $S_n$  und des entsprechenden Punktes  $P_2$  aus  $V_n$  ist. Durch  $P$  auf  $W$  geht ein linearer  $R_n$  und ein  $R_m$ . Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in  $P(P_1, P_2)$  die Funktionalmatrix  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$  singulär sei, die folgende: Der 2-Schmiegrungsraum an  $\bar{V}_n$  in  $P$  und der Berührungsraum von  $W$  in  $P$  müssen einen Verbindungsraum haben, dessen Dimension kleiner als im Normalfalle ist, d. h.  $\bar{V}_n$  hat in  $P$  auf  $W$  quasiasymptotischen Charakter. Eine andere Deutung: Der Berührungsraum  $S_n$  an  $V_n$  in  $P$  schneidet den  $R_n$  von  $W$  in  $P$  längs einer Geraden.

*E. Bompiani (Roma).*

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

**Pastori, Maria:** Operatori differenziali di ordine superiore negli spazi di Riemann. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 1—14 (1941).

Verf. bespricht verschiedene Operationen, welche aus kovarianter Ableitung mittels Heben oder Senken von Indizes oder mittels Überschiebung mit dem  $n$ -Vektor  $e^i \dots e^n$  hergeleitet werden können.

*Ľlavatý (Prag).*

**Varga, Ottó:** Aufbau der Finslerschen Geometrie mit Hilfe einer oskulierenden Minkowskischen Maßbestimmung. Mat. Természett. Értes. 61, 14—21 u. dtsch. Zusammenfassung 22 (1942) [Ungarisch].

In Verfolgung früherer Arbeiten (dies. Zbl. 26, 86; 27, 93) gibt Verf. einen neuen Aufbau der Finslerschen Geometrie, der darauf beruht, daß sich ein Finslerscher Raum im Kleinen wie ein Minkowskischer verhält. „Das Minkowskische Raumelement, das im Kleinen ein Finslersches Raumelement annähert, wird auf ein solches Koordinatensystem bezogen, daß dadurch die Minkowskische Maßbestimmung die Finslersche oskuliert, und diese oskulierende Maßbestimmung ermöglicht es, neben der Raummetrik auch den euklidischen Zusammenhang des Raumes herzustellen.“ Nach Auszug.

*Harald Geppert (Berlin).*

**Lichnerowicz, André:** Sur une généralisation des espaces de Finsler. C. R. Acad. Sci., Paris **214**, 599—601 (1942).

In einem  $n$ -dimensionalen Raum sei gegeben: Eine Funktion  $L(x, dx)$ , homogen ersten Grades, und ein kovarianter Vektor  $J_\lambda$ . Daraus bestimmt Verf. eine halbmetrische Übertragung, die mit dem Variationsproblem  $\delta\sigma = 0$  mit

$$\sigma = \int_M^N [\exp \int_M^{x^\lambda} J_\lambda dx^\lambda] L$$

zusammenhängt.

*J. Haantjes* (Amsterdam).

**Bortolotti, Enea:** Vedute e problemi della teoria delle connessioni. Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. **3**, 241—281 (1942).

Vorliegende Arbeit ist die letzte des der Wissenschaft allzufrüh entrissenen Verf. Sie bietet eine Darstellung der Grundlagen der Theorie des linearen Zusammenhangs mit besonderer Berücksichtigung der affinen Zusammenhänge. Hauptziel des Verf. ist dabei, die begrifflichen und geometrischen Seiten der Theorie, die oft durch einen allzu schwierigen Formelapparat erstickt werden, herauszuschälen und die bisherigen Ergebnisse den noch ungelösten Fragen gegenüberzustellen. Zunächst legt Verf. die innige Beziehung zwischen dem Levi-Civitaschen Parallelismus und der kovarianten Ableitung von Ricci und damit die geometrische Konstruktion der kovarianten Ableitung vom Parallelismus aus, die auf Dienes-Hlavaty zurückgeht, dar. Der allgemeinste affine Zusammenhang läßt sich konstruieren entweder als vektorielle Übertragung im Sinne von Weyl oder als Punktzusammenhang im Sinne von Cartan. Das Übertragungsgesetz der Vektoren  $\delta\xi^r = d\xi^r + \Gamma_{si}^r \xi^s du^i = 0$  wird in rein geometrischer Form dargestellt, indem die Linearität der Transformationskoeffizienten in den Differentialen  $du^i$  gedeutet wird, und ebenso in rein analytischer Form als geometrische Darstellung eines totalen Differentialgleichungssystems, das nicht unbeschränkt integrierbar ist (dies ist der Ausgangspunkt von Bompiani für seine interessanten Untersuchungen). Dem Begriff des Berührungsraumes nach Cartan in einem Punkte  $P$  der Mannigfaltigkeit  $X_n$  wird der des Schmiegrumes, der von Cartan bereits für den Riemannschen Zusammenhang benutzt wurde und der in gewissem Sinne so gedeutet werden kann, daß er die Kalotte 2. Ordnung der Mannigfaltigkeit in  $P$  enthält, an die Seite gestellt. Damit läßt sich das Übertragungsgesetz von  $P$  nach  $P + dP$  als Übertragung im gewöhnlichen Sinne im Schmiegrum von  $P$  deuten. Dadurch, daß man den einzelnen Punkten der Mannigfaltigkeit ihre Schmiegräume zuordnet, hat man also die Möglichkeit, ihr einen affinen Zusammenhang aufzuprägen. Beschränkt man sich auf die Punkte einer Kurve  $\Gamma$ , so läßt sich das Übertragungsgesetz längs  $\Gamma$  bzw. das infinitesimale Übertragungsgesetz in den von einem Punkte von  $\Gamma$  ausgehenden Richtungen als gewöhnliches Übertragungsgesetz in einem zu  $\Gamma$  assoziierten affinen Raum (affiner Abwicklungsraum) bzw. in dem zu dem Punkte von  $\Gamma$  gehörenden Schmiegrum (affiner Übertragungsraum) deuten. Die Existenz des affinen Abwicklungs- bzw. Übertragungsraumes hängt eng mit der der geodätischen Koordinaten von Schouten und Fermi zusammen. Mittels des Übertragungsgesetzes der Punkte werden die von einem Punkte von  $X_n$  ausgehenden Kurven abgewickelt in ihre Tangentialbilder innerhalb des in  $P$  berührenden affinen Raumes  $E_n$ . Es entsteht die vom Verf. ausführlich entwickelte Möglichkeit, eine passende Umgebung von  $P$  in  $E_n$  „normal“ abzubilden und daher Elemente von  $E_n$  auf  $X_n$  zu übertragen und umgekehrt. Insbesondere entstehen die Normalkoordinaten von Veblen durch Übertragung der kartesischen Koordinaten von  $E_n$  nach  $X_n$ . Weiterhin bietet sich damit die Möglichkeit, die Konstruktion der kovarianten Ableitungen auf gewöhnliche Ableitungen zurückzuführen und allgemeiner eine geometrische Konstruktion der von der Princeton-Schule eingeführten Operation der „Erweiterung“, die bisher fehlte, zu geben. — Den Abschluß der Arbeit bildet ein Gesamtüberblick über die affine und konforme Übertragung nach Weyl und Cartan und die ent-



sprechenden Beiträge von Berwald. Es folgen einige Anwendungen auf die Flächen im affinen  $E_3$ , auf Geradenkongruenzen im euklidischen  $R_3$ , sowie einige Bemerkungen über die einheitlichen Feldtheorien der modernen Physik. Eine umfangreiche Bibliographie ist beigelegt.

Maxia (Roma).

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Roger, Frédéric: Sur la courbure des ensembles plans. C. R. Acad. Sci., Paris 214, 852—854 (1942).

L'au. donne des théorèmes de répartition pour la courbure des ensembles plans  $E$  analogues à ceux contenus dans sa Thèse (cf. ce Zbl. 18, 250) relatifs au premier ordre. En tout point d'accumulation de  $E$  et suivant chaque direction du faisceau dérivé premier, il définit des éléments de contact du second ordre (demi-cercles orientés) au moyen de triplets convergeant (définition délicate) et de là des courbures algébriques dites „ordinaires“. Il considère dans  $\bar{E}$  l'ensemble  $E_0$  des points d'accumulation de  $E$  où existe une direction  $\Delta$  dans laquelle  $-\infty$  (ou  $+\infty$ ) n'est pas courbure ordinaire. Appelant courbe convexoïde une courbe  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) pour laquelle le quotient différentiel second reste borné soit inférieurement, soit supérieurement, il affirme (lemme de décomposition) qu'il est possible de décomposer  $E_0$  en un système dénombrable d'ensembles fermés  $F_i$  (non nécessairement disjoints) et d'attacher à chaque  $F_i$  un carré fermé  $Q_i$  (dont on prend les côtés pour axes de coordonnées), une courbe convexoïde  $C_i$  et une courbe de Lipschitz  $L_i$  situées sur  $Q_i$  tels que  $F_i \subset C_i$ ,  $E \cdot Q_i \subset L_i$ . L'ensemble exceptionnel du second ordre apparaît naturellement comme la réunion des points exceptionnels de courbes convexoïdes d'une famille dénombrable, les points exceptionnels d'une courbe convexoïde étant ceux où elle n'admet pas de courbure unique. Le théorème de répartition des courbures ordinaires nous apprend qu'aux points d'accumulation de l'ensemble  $E$  non situés sur un ensemble exceptionnel d'ordre deux (donc de longueur nulle) se présente l'une des trois dispositions suivantes: 1. Dans chaque direction d'accumulation les deux courbures ordinaires extrêmes sont  $\Gamma = +\infty$  et  $\gamma = -\infty$ . 2.  $E$  admet une tangente unique et les quatre courbures extrêmes sont  $\Gamma = +\infty$ ,  $\gamma = \Gamma'$  fini,  $\gamma' = -\infty$ . 3.  $E$  admet, outre une tangente, une courbure unique. Dans le cas où  $E$  est un continu, l'au. indique un théorème de répartition aussi précis que le correspondant du premier ordre: les éléments de contact du second ordre d'un continu plan ne peuvent être, presque partout, que la totalité des éléments du second ordre attachés à un élément de contact bien déterminé d'ordre 0 (indétermination complète), 1 (semi-détermination) ou 2 (détermination).

Chr. Pauc (Berlin).

Humbert, Pierre: Sur certaines figures planes de l'espace attaché à l'opérateur  $\Delta_3$ . Bull. Sci. math., II. s. 66, 145—154 (1942).

Die Arbeit setzt die früheren Untersuchungen (dies. Zbl. 22, 395; 25, 88) des Verf. über die ebene Geometrie mit der „Entfernung“  $(x^3 + y^3)^{1/3}$  fort. Zieht man von einem Punkt  $S$  aus nach drei Punkten  $A, B, C$  der  $x$ -Achse Strecken, so nennt Verf. diese Figur ein Bitriangel. Höhensatz und Schwerpunktssatz werden in der in dies. Zbl. 25, 88 angegebenen Fassung bewiesen. Erfüllen die Richtungsfaktoren der Geraden  $SA, SB, SC$  die Relationen  $m_1 m_2 m_3 = -1$ ,  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ , so entsteht ein „spezielles Bitriangel“. Für dieses wird der „Umkreis“ der Form  $x^3 + (y - h)^3 - l x^2 = 0$  mit seinen Eigenschaften untersucht und auch ein „Zwölfpunktekreis“ durch 12 aus dem Bitriangel konstruierbare Punkte aufgezeigt. Im übrigen sind bei Hereinnahme dieses „Kreis“begriffs die Analogien zur Dreiecksgeometrie sehr schwach.

Harald Geppert (Berlin).

Sz. Nagy, Gyula v.: Ein Beweis des Vierscheitelsatzes. Jber. Dtsch. Math. Vereinig. 52, Abt. 1, 198—200 (1942).

Ein „Mond“ besteht aus zwei stetig gekrümmten Konvexbogen, die auf der gleichen Seite der Verbindungsgeraden ihrer gemeinsamen Endpunkte liegen und außer diesen

keinen gemeinsamen Punkt haben. Der Mond heißt einfach, wenn die Totalkrümmung jedes seiner beiden Bogen  $\leq \pi$  ist. Man beweist leicht, daß die Maximalkrümmung des äußeren Bogens eines einfachen Mondes  $\geq$  der Minimalkrümmung seines inneren Bogens ist. Schneidet man eine Eilinie mit dem Umkreis eines ihr eingeschriebenen spitzwinkligen Dreiecks, dessen Ecken sie in einfache Bogen teilt, so entstehen  $2n \geq 4$  einfache Schnittpunkte und damit  $2n$  einfache Monde; die Anwendung des Gesagten ergibt für die Krümmung auf der Eilinie mindestens  $2n$  relative Extrema, d. h. Scheitel.

Harald Geppert (Berlin).

**Bol, G.:** Zur Theorie der Eikörper. Jber. Dtsch. Math. Vereinig. 52, Abt. 1, 250—266 (1942).

$B$  sei ein konvexer Körper vom Inkugelradius  $r$ ,  $a_P$  bezeichne den Abstand seines inneren Punktes  $P$  vom Rand. Die Gesamtheit der Punkte von  $B$  mit  $a_P \geq h \leq r$  bezeichnet man als den Parallelbereich nach innen  $B(r-h)$ ; so ist für  $\lambda \geq 0$  die Schar der Parallelbereiche von  $B$  erklärt, für  $\lambda \geq r$  ergeben sich die Parallelbereiche nach außen. Bezeichnet  $dv$  das Volumelement von  $B$ , so bildet Verf. die Momente

$$(*) \quad J_\mu = \int_B a_P^\mu \cdot dv, \quad J_\mu(\lambda) = \int_{B(\lambda)} a_P^\mu dv$$

und verallgemeinert die Minkowskischen Ungleichungen durch umfassendere zwischen diesen Momenten. Für  $J_\mu$  als Funktion von  $\mu$  gilt:  $(\mu+1)J_\mu$  ist für  $\mu > -2$  logarithmisch konvex und für komplexes  $\mu$  mit  $\Re \mu > -2$  regulär analytisch;  $J_\mu$  hat für  $\mu = -1$  einen einfachen Pol mit dem Residuum = doppelt gerechnete Oberfläche  $O(0)$  des „Kerns“  $B(0)$  von  $B$ ; für  $\mu \rightarrow \infty$  gilt asymptotisch

$$J_\mu = \frac{r^{\mu+1}}{\mu+1} \{O(0) + o(1)\}.$$

Für ganzzahlige  $\mu \geq 1$  gelten die wichtigen Ungleichungen

$$(1) \quad J_\mu^2 - \left\{1 - \frac{1}{(\mu+1)^2}\right\} J_{\mu-1} J_{\mu+1} \leq 0, \quad (1a) \quad V^2 - 2O \cdot J_1 \leq 0,$$

$$(2) \quad J_\mu^2 - \left\{1 - \frac{1}{(\mu+1)(\mu+3)}\right\} J_{\mu-1} J_{\mu+1} \geq 0, \quad (2a) \quad V^2 - \frac{4}{3}O \cdot J_1 \geq 0.$$

(1), (1a) sind eine Folge der logarithmischen Konvexität von  $(\mu+1)J_\mu$ ; in ihnen steht das Gleichheitszeichen nur für  $r=0$ . Wesentlich tiefer liegen die Beziehungen

(2), (2a); setzt man  $V_0 = \frac{4}{3}\pi$ ,  $V_1 = \frac{1}{3}M$ ,  $V_2 = \frac{1}{3}O$ ,  $V_\mu = \binom{\mu}{3} J_{\mu-3}$  ( $\mu \geq 3$ ), so sind

$$(2), (2a) \text{ zusammen mit den Minkowskischen Ungleichungen } M^2 - 4\pi O \geq 0, \quad O^2 - 3MV \geq 0$$

gleichwertig den Konkavitätsbedingungen der Folge

$$V_0, V_1, \dots, \quad \text{d. h.} \quad V_i^2 - V_{i-1}V_{i+1} \equiv \Delta_i \geq 0.$$

Bildet man die entsprechenden Größen für  $B(\lambda)$ , so folgt daraus, daß  $\sqrt[\mu]{J_{\mu-3}(\lambda)}$  für  $\mu \geq 3$  eine konkave Funktion von  $\lambda$  ist, die dann und nur dann zu einer linearen Funktion ausartet, wenn  $B$  eine Kugel ist. In (2), (2a) steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn  $B$  Tangentialkörper einer Kugel ist; ein solcher entsteht, indem man in jedem Punkte einer abgeschlossenen Menge der Kugelfläche die Tangentenebene an die Kugel zieht und den Durchschnitt der durch diese Ebenen begrenzten, die Kugel enthaltenden Halbräume bildet. — Eine Folge dieser Ungleichungen ist, daß unter allen Eikörpern, für die ein  $V_\nu$  mit  $1 \leq \nu < n$  einen gegebenen Wert hat,  $V_n$  für die Kugel und nur für diese den Höchstwert annimmt. Führt man in der Definition (\*) statt der Punktdichte  $dv$  im Sinne der Integralgeometrie die Ebenendichte  $\dot{E}$  oder die Geradendichte  $\dot{G}$  ein, so entstehen neue Momente  $J_{E,\mu}$ ,  $J_{G,\mu}$ . Es ist  $J_{G,\mu} = \frac{\pi}{2} \mu J_{\mu-1}$  und  $(\mu+1)J_{E,\mu}$  logarithmisch konkav, wobei sich zu (1), (2) analoge Ungleichungen angeben lassen. — Alle Ergebnisse lassen sich auf den euklidischen  $R_n$  sowie die Minkowskische Relativgeometrie übertragen. Harald Geppert.



**Fiala, F.:** Le problème des isopérimètres dans les plans de Riemann à courbure de signe constant. *Comment. math. helv.* **15**, 249—264 (1943).

Ist der Euklidischen Ebene eine analytische Riemannsche Metrik aufgeprägt, bei der jede ins Unendliche verlaufende Kurve unendliche Länge hat, so spricht man von einer „Riemannschen Ebene“, wird sie durch die euklidische Metrik auf einer Fläche im  $R_3$  realisiert, so nennt man diese eine offene Fläche (vgl. Cohn-Vossen, dies. Zbl. **11**, 225; **14**, 276; F. Fiala, dies. Zbl. **25**, 230; A. Preissmann, dies. Zbl. **27**, 259). — Verf. fragt nach Lösungen des isoperimetrischen Problems auf einer solchen Ebene oder der zugehörigen Fläche: Gibt es unter allen Jordankurven vorgegebener Länge  $L$  eine solche maximalen Flächeninhalts? Er zeigt: 1. Ist die Metrik überall positiv gekrümmt, so ist das Problem lösbar, wenn  $L$  unterhalb einer nur von der Fläche abhängigen Schranke  $L^*$  liegt. Beispiele: das ell. Paraboloid, ein Mantel des zweischaligen Hyperboloids, viele Drehflächen. 2. Ist die Metrik nirgendwo positiv gekrümmt — aber die Krümmung nicht überall Null — und hat sie nach unten beschränkte Gesamtkrümmung, oder geht die Krümmung im Unendlichen überall nach Null, so hat das Problem keine Lösung. Beispiel: das hyperbolische Paraboloid. — Eine Lösung des isoperimetrischen Problems hat immer konstante geodätische Krümmung, aber auch wenn es auf einer Fläche geschlossene Kurven konstanter geodätischer Krümmung gibt, so brauchen diese das Problem nicht zu lösen, ja dieses kann auf der Fläche ohne Lösung sein. Hierfür Beispiele. *Bol* (Greifswald).

## Klassische theoretische Physik.

**Kaila, E.:** Sur le concept de loi naturelle. *Scientia* **36**, 133—139 (1942).

### Mechanik:

**Abelé, Jean:** Système d'entretien à amplitude autostabilisée. *C. R. Acad. Sci., Paris* **214**, 841—842 (1942).

Kurze Notiz. Betrachtet werden selbsterregte Systeme, die der Differentialgleichung  $y dy + 2Ry dx + x dx = 0$  genügen. Diese Differentialgleichung entsteht aus der Schwingungsgleichung  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2R\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$  durch die Substitution  $\frac{dx}{dt} = \omega y$ . Für den Fall, daß  $R$  Funktion nur von  $x$  ist, hat Liénard früher eine graphische Integration angegeben. Verf. untersucht den allgemeineren Fall, daß  $R$  gleichzeitig von  $x$  und  $y$  (von Elongation und Geschwindigkeit) abhängt. Er teilt folgende Ergebnisse mit: Notwendige und hinreichende Bedingungen für  $R$ , die stabile, sinusförmige Schwingungen zur Folge haben; eine zweckmäßige geometrische Darstellung der Bewegung in einem schiefwinkligen  $xy$ -Koordinatensystem; das Gesetz für die Einstellung des stationären Schwingungszustandes nach einer Störung. — Die Beweise sollen in einer anderen Veröffentlichung erscheinen. *Schoch* (Berlin).

**Lințeș, I.:** Le problème de la balistique extérieure. *Bul. Politehn., București* **12**, 292—302 (1941).

Verf. diskutiert auf Grund der allgemeinen Bewegungsgleichungen starrer Körper, die er mit Rücksicht auf die ballistische Anwendung durch gewisse Annahmen vereinfacht, Ziele künftiger, insbesondere experimenteller Untersuchungen, deren Durchführung als Grundlagen zur Lösung des allgemeinsten außerballistischen Problems nötig erscheinen. *v. Borbély* (Koložsvár).

**Buchanan, H. E.:** Der augenblickliche Stand des Dreikörperproblems. *Rev. mat. hisp.-amer.*, IV. s. **2**, 97—103, 211—217 u. 247—252 (1942) [Spanisch].

Einleitend wird ein Bericht über die wichtigsten neueren Arbeiten zum Dreikörperproblem versprochen. Nach Ausführungen über Koordinatensysteme, elementare Integrale und Variationsgleichungen folgt das eingeschränkte Problem. Hier findet als einziger bemerkenswerter Hinweis ein offenbar weittragender Satz über

das Verschwinden von charakteristischen Exponenten und dessen Bedeutung für die Integrale der Variationsgleichungen Erwähnung, der von Verf. und W. L. Duren [Duke math. J. 1, 436—441 (1935); dies. Zbl. 13, 183] stammt. Weitere Abschnitte beschäftigen sich mit periodischen Lösungen in der Nähe der Librationspunkte im eingeschränkten Falle und in der Nachbarschaft der Dreieckslösung im allgemeinen Problem. In der Hauptsache wird nur das Schrifttum beider Amerika herangezogen, völlig fehlen die Kopenhagener Arbeiten von E. Strömgren und seinen Mitarbeitern, man vermißt aber auch die erst kürzlich C. Agostinelli (dies. Zbl. 26, 24) geglückte ganz erstaunliche Verallgemeinerung der Dreieckslösung von Lagrange.

v. Schelling (Berlin).

**Armellini, Giuseppe: Il problema ristretto lineare dei tre corpi.** Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 15—22 (1941).

Verf. zeigt, daß folgendes Problem stets auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden kann: Es ist die Bewegung dreier Körper zu bestimmen, die sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen und sich auf einer Geraden bewegen, wobei eine Masse verschwindend ist und die Energiekonstante 0 ist.

G. v. Schrutka (Hamburg).

**Kabakioğlu, Tefvik Okyay: Verallgemeinerung und Anwendung der Wilkesschen Theorie im Problem der mehrfachen Kommensurabilitäten.** Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul 6, 192—223 (1942).

Verf. erweitert die Untersuchungen von Wilkens über das Problem der mehrfachen Kommensurabilitäten im Sonnensystem, indem er in der Entwicklung der Störungsfunktion alle in Frage kommenden Glieder mit dem kritischen Argument, also auch solche von der Ordnung der Exzentrizitäten berücksichtigt, während Wilkens sich auf das Hauptglied vom nullten Grade der Exzentrizitäten beschränkt hatte. In der Arbeit wird speziell der Fall behandelt, in dem bei strenger Kommensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen  $n$  (Kleiner Planet),  $n'$  (Jupiter) und  $n''$  (Saturn) die Beziehung  $2n - 5n' + 3n'' = 0$  besteht. Zunächst wird unter Berücksichtigung der erwähnten Glieder in der Reihenentwicklung der Störungsfunktion, die von dem kritischen Argument  $K = 2l - 5l' + 3l''$  abhängen, die Differentialgleichung für  $K$  abgeleitet. Die Integration dieser Differentialgleichung ist streng analytisch nicht möglich. Sie erfolgt daher zuerst für den angenommenen Fall einer Libration von  $K$  innerhalb enger Grenzen, indem  $K$  nach Potenzen von  $K_1$  entwickelt wird, wobei mit  $K_1$  die jeweilige Abweichung von  $K$  von einem festen Wert  $\bar{K}_0$  bezeichnet ist. Die zweiten und höheren Potenzen von  $K_1$  werden vernachlässigt. Dieser Fall der Libration tritt z. B. bei dem Planeten 1154 Astronomia auf. Sodann erfolgt die Integration für den allgemeinen Fall mit Hilfe der Näherungsmethode von Brown und Shook, bei der von der als Fourierreihe angesetzten Lösung der unvollständigen, homogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten zur Lösung der vollständigen, inhomogenen Gleichung übergegangen wird. Zum Schluß werden die erhaltenen Resultate zur Berechnung der von dem kritischen Argument herrührenden langperiodischen Störungen, die bekanntlich erst in der zweiten Ordnung der Massen auftreten, angewandt. Und zwar werden die langperiodischen Störungen der mittleren Bewegung  $n$  und hieraus die der großen Halbachse  $a$  ermittelt. E. Rabe (Berlin).

**Castoldi, Luigi: Sopra una causa non relativistica di spostamento del perielio dei pianeti.** Ist. Lombardo, Rend., III. s. 75, 563—569 (1942).

Verf. erörtert die Möglichkeit, ob vielleicht Perihelbewegungen durch die Abplattung der Planeten hervorgerufen werden können und zeigt, daß diese unmerklich klein sind.

G. Schrutka (Hamburg).

**Armellini, Giuseppe: Contributo alla dinamica del sistema Galattico.** Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 73—82 (1941).



## **Elastizität, Akustik:**

**Walén, C.:** Ein Fall von Deformation in einem elastischen Halbraum. Tekn. T., Norrköping 72, 383—385 (1942) [Schwedisch].

**Schallenkamp, A.:** Transversalschwingungen eines einseitig eingespannten Trägers bei bewegter Last. Ing.-Arch. 13, 267—272 (1943).

L'Au. admet, en plus de la flexion, une résistance élastique de l'encastrement. L'équation de la fibre moyenne déformée est prise, en négligeant les harmoniques, de la forme:

$$y(x, t) = q_1(t) y_1(x) + q_2(t) y_2(x)$$

avec:

$$y_1 = \sqrt{\frac{3}{l^3}} x, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{0,0125 l^3}} \left( x^2 - \frac{3}{4} l x \right)$$

constituant un système orthogonal normé. Si la charge mobile est sans inertie, les équations de Lagrange donnent une vibration transversale à deux fréquences propres. L'Au., supposant le couplage négligeable, explicite la solution dans un certain nombre de cas-types et en déduit la courbe parcourue par la charge. — Lorsqu'on tient compte de l'inertie, cette courbe  $y = f(x)$  est l'inconnue du problème. L'Au. développe alors  $f(x)$  suivant les polynômes de Legendre  $f(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots$  et décompose ainsi la déformation (en se bornant à un mouvement uniforme  $x = vt$  de la charge) en une infinité de cas du type résolu plus haut. Reconstituant ensuite les mouvements, il détermine les  $a_0, a_1, \dots$  comme solutions d'un système infini linéaire, pratiquement limité à ses premiers termes. Cette étude intéresse les pièces d'artillerie, notamment pour la détermination de l'angle de tir. On peut également tenir compte d'une courbe initiale du tube.

R. Mazet (Lille).

**Ylinen, Arvo:** Über das Knicken einer aus mehreren längsgehenden Elementen zusammengesetzten Stäbe, insbesondere mit Anwendung auf den Einsturz der Sandöbrücke. Tekn. T., Norrköping 72, 391—401 (1942) [Schwedisch].

**Finzi, Bruno:** Propagazione ondosa nei continui anisotropi. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 75, 630—640 (1942).

Verf. betrachtet elastische Kontinuen sehr allgemeiner Natur, die nicht isotrop oder homogen zu sein brauchen, in denen ferner der Spannungstensor  $p_{rs}$  irgendeine tensorielle Funktion des Deformationstensors  $\xi^{ik}$  sein kann; es wird nur vorausgesetzt, daß  $p_{rs} \delta \xi^{rs}$  ein totales Differential sei, womit sich die Komponenten des Tensors  $\frac{\delta p_{rs}}{\delta \xi^{ik}}$ , genau wie im klassischen Falle, auf 21 reduzieren. In einem solchen Kontinuum, das übrigens irgendwie durch Massenkräfte beansprucht werden kann, untersucht Verf. die Möglichkeit von Unstetigkeitswellen durch Anwendung der Methode der Charakteristiken. Es ergibt sich, genau wie in sehr bekannten klassischen Fällen, daß an jeder Stelle des Kontinuums und für jede Richtung  $n$ , genau drei Fortschreitungs-geschwindigkeiten existieren, und zwar für Unstetigkeitswellen irgendwelcher Form: die drei genannten Geschwindigkeiten hängen im allgemeinen von der Richtung  $n$  ab. In jedem Punkte des Kontinuums und für jede Richtung  $n$  kann ferner ein Ellipsoid definiert werden, dessen Halbachsen zu den drei Geschwindigkeiten reziprok sind, während die Richtungen der Achsen die Unstetigkeitsrichtungen der zweiten Ableitungen des Verschiebungsvektors angeben. Im allgemeinen fällt keine der drei Richtungen der Achsen mit  $n$  zusammen, so daß man nicht von longitudinalen oder transversalen Wellen reden kann. In Sonderfällen kann aber  $n$  die Richtung einer Achse haben; dies geschieht z. B. in den sogenannten Greenschen Kontinuen. Conforto (Rom).

## **Hydrodynamik:**

**Agostinelli, Cataldo:** Applicazione del metodo delle immagini alla determinazione del moto liquido piano in una corona circolare in cui si formino dei vortici puntiformi. Problemi elettrostatici corrispondenti. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 75, 669—689 (1942).

Es handelt sich um einen Sonderfall der allgemeinen Aufgabe, aus bekanntem

Wirbelfeld bei geeigneten Grenzbedingungen das Geschwindigkeitsfeld zu ermitteln. In dem von Flüssigkeit erfüllten Raum zwischen zwei festen Wänden von der Gestalt koaxialer Kreiszylinderflächen befinde sich ein einzelner Wirbelfaden der Intensität  $J$ . Es wird das komplexe Potential der ebenen Wirbelgleichung bestimmt unter der Bedingung, daß sein Imaginärteil auf dem äußeren Kreis des Kreisringes verschwindet und auf dem inneren Kreis einen konstanten Wert annimmt. Durch Spiegelung an den Wänden (Transformation mittels reziproker Radien) wird eine Doppelfolge von Bildpunkten des Wirbels gewonnen, die auf eine geschlossene Darstellung des gesuchten Potentials mit Hilfe der Weierstraßschen  $\sigma$ -Funktion führt. Daraus werden die komplexe Geschwindigkeit, die resultierende Kraft und das resultierende Moment abgeleitet. Auf den Fall, daß an Stelle des einzelnen sich mehrere koaxiale Wirbelfäden in der Flüssigkeit befinden, wird kurz eingegangen. Der zweite Teil ist der Anwendung der vorstehenden Ergebnisse auf eine entsprechende Aufgabe der Elektrostatik gewidmet.

Garten (Leipzig).

● **Nikuradse, I.: Laminare Reibungsschichten an der längs angeströmten Platte. Ein Beitrag zur Prandtl'schen Grenzschichttheorie.** München u. Berlin: R. Oldenbourg 1942. 47 S. u. 76 Abb. RM. 6.—.

Verf. sucht zunächst durch eine zusammenfassende, recht weit ausholende und ziemlich breite Darstellung eine grundsätzlich anschaulich gehaltene, durch zahlreiche Skizzen unterstützte Einführung in die Prandtl'sche Grenzschichttheorie zu geben, wobei wesentlich Neues nicht geboten wird. Sodann werden die Ergebnisse experimenteller, im Jahre 1933 in Göttingen durchgeführter Untersuchungen der Plattenströmung mitgeteilt, die zeigen, daß die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung eine weit bessere ist, als bisher auf Grund der von Hansen [Z. angew. Math. Mech. 8, 185—199 (1928)] bereits im Jahre 1928 veröffentlichten Resultate vermutet werden durfte.

Harry Schmidt (Berlin).

● **Nikuradse, I.: Turbulente Reibungsschichten an der Platte.** München u. Berlin: R. Oldenbourg 1942. 24 S. u. 39 Abb. RM. 3.—.

Auf Grund von Messungen, die einerseits in Göttingen, andererseits in der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt in Berlin-Adlershof durchgeführt wurden, wird ein Beitrag zum Problem der turbulenten Plattenströmung geliefert; vorausgeschickt wird dabei eine ziemlich ausführliche Einleitung, die eine Übersicht über die einschlägigen bisherigen Anschauungen und Ergebnisse vermitteln soll. Als Hauptresultat der neuen Versuche wird für die Geschwindigkeitsprofile  $u = u(y)$  ein Gesetz von der Form  $u/U = f(y/\delta^*)$  gefunden, wobei unter  $U$  die Anströmungsgeschwindigkeit sowie unter  $\delta^* = \delta^*(x)$  die Verdrängungsdicke ( $x$  Längs-,  $y$  Querkoordinate) zu verstehen ist. Die hieraus gezogenen Folgerungen werden unter Wiedergabe reichlichen Zahlen- und Kurvenmaterials im einzelnen geprüft.

Harry Schmidt (Berlin).

**Toraldo di Francia, Giuliano: Sui moti di un liquido viscoso fra pareti cilindriche coassiali. Caso stazionario.** Ist. Lombardo, Rend., III. s. 75, 575—586 (1942).

Untersuchung einiger besonderer stationärer Lösungen der Gleichungen der Bewegung einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei koaxialen zylindrischen Flächen  $C_1$  (innen) und  $C_2$  (außen), an denen sie haftet, wobei die Flüssigkeit und auch die Wände eine von  $x$  unabhängige Translation in Richtung der Achse ( $x$ ) ausführen können. Der bekannteste und einfachste hierher gehörige Sonderfall ist der der Poiseuilleschen Strömung. Außer diesem werden noch folgende Fälle betrachtet: (1)  $C_1$  führt eine zur Achse parallele Bewegung aus; (2) die „zähen Drehungen“ (von U. Cisotti als rotazioni viscoso bezeichnet), bei denen  $C_1$  festgehalten wird und  $C_2$  mit konstanter Drehgeschwindigkeit umläuft; (3) die beiden Zylinder werden festgehalten, und die Bewegung der Flüssigkeit erfolgt nur unter dem Einfluß eines konstanten Druckgradienten längs der Achse; das auftretende Maximum der Geschwindigkeit liegt näher an  $C_1$  als an  $C_2$ . Für einige Fälle werden die inneren Spannungen ausgerechnet und die Hauptspannungen ermittelt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).



**Müller, Wilhelm:** Beitrag zur Theorie der langsamen Strömung zweier exzentrischer Kreiszyylinder in der zähen Flüssigkeit. Z. angew. Math. Mech. **22**, 177—189 (1942).

Im Zusammenhang mit zwei früheren einschlägigen Veröffentlichungen des Verf. (dies. Zbl. **27**, 20, 25) wird diejenige ebene Strömung einer zähen Flüssigkeit behandelt, die durch die langsame Drehung zweier exzentrischer Kreiszyylinder bedingt ist; dabei werden mit Verwendung bipolarer Koordinaten die auf die einzelnen Zylinder ausgeübten Kräfte und Momente ermittelt. Einige bemerkenswerte, durch relativ einfache Formen der Stromfunktion charakterisierte Spezialfälle werden unter Veranschaulichung der Ergebnisse durch zeichnerische Darstellungen eingehender diskutiert.

*Harry Schmidt* (Berlin).

**Schubert, Hans:** Berichtigung zu meiner Arbeit: Über die unendlichen Gleichungssysteme der Prandtl'schen Tragflügeltheorie. (Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. XXXVIII u. XXXIX, S. 43—63.) S.-B. Berl. Math. Ges. **40/41**, 38 (1942).

Bezieht sich auf dies. Zbl. **25**, 59.

**Schmeidler, Werner:** Zur Theorie des Schwingenfluges. 2. S.-Ber. Berlin. math. Ges. **40/41**, 1—12 (1942).

Für die 1. Mitt. vgl. dies. Zbl. **25**, 376. Zur Theorie des Schwingenfluges wird der Tragflügel, im inkompressiblen Medium liegend, ersetzt gedacht durch eine flächenhafte Belegung gebundener Wirbel mit räumlich und zeitlich veränderlicher Zirkulation. Die zugehörige Schleppe freier Wirbel besteht dann aus Hufeisen- und Ringwirbeln. — Unter der Voraussetzung, daß die Flügeltiefe klein ist gegen die Spannweite, ergibt sich aus der Randbedingung im Geschwindigkeitsfeld der Strömung eine lineare Integralgleichung, in der als unbekannte Funktion nur noch die Zirkulationsverteilung der gebundenen Wirbel in Spannweitenrichtung auftritt. Die Betrachtung wird dabei auf zeitlich harmonische Veränderlichkeit der Zirkulation beschränkt, wobei im Gegensatz zu einer früheren Arbeit des Verf. nicht mehr die Kleinheit des Verhältnisses von Schwingungsfrequenz zu Anblaseschwindigkeit gefordert wird. — Zur Auflösung der Integralgleichung empfiehlt Verf. die Anwendung der Multhoppschen Methode in einer sinngemäßen Ausdehnung.

*Dietze* (Berlin).

**Borbély, Samu:** Über die näherungsweise hydrodynamische Bestimmung des Geschwiderstandes. Mat. fiz. Lap. **49**, 254—273 (1942) [Ungarisch].

Bei rotationssymmetrischer Überschallströmung werden das Widerstandsproblem im Hinblick auf technisch wichtige Anwendungen hinsichtlich der Lösungsmöglichkeiten diskutiert, der geometrisch-physikalische Gehalt der Charakteristiken sowie die Voraussetzungen der Linearisation, die Bedingungen der Wirbelfreiheit und des adiabatischen Vorganges betreffend, näher erörtert, und im speziellen Falle des schlanken Geschosses zur systematischen Bestimmung der v. Kármánschen Störgeschwindigkeiten eine Methode mit Hilfe von Hakenintegralen angegeben.

*S. v. Borbély.*

## **Thermodynamik:**

**Havlíček, F. J.:** Zum Verhalten des spezifischen Volumens von Gasen und Flüssigkeiten. Z. Physik **119**, 677—684 (1942).

Die Abweichung des Volumens vom idealen Gasvolumen  $v_0 = RT/p$  wird durch  $z = (v_0 - v)/v_0 - b$ , wobei  $b$  das Kovolumen ist, gekennzeichnet.  $S_1$  bezeichne die Differenz der Entropie des realen Gases oder der Flüssigkeit gegen die eines idealen Gases;  $\frac{dQ}{dz}$  sei die Wärmetönung, welche der Änderung  $dz$  entspricht. Verf. berechnet zunächst  $(dT/dz)_p$  und  $(dp/dz)_T$  als Funktionen von  $T$ ,  $p$ ,  $z$ ,  $\frac{dS_1}{dz_1}$  und  $\frac{dQ}{dz}$  und zeigt durch eine kurvenmäßige Wiedergabe des Verlaufes der empirischen Werte von  $S_1$  und  $Q$  von Wasserdampf als Funktion von  $z$ , daß diese beiden Größen eindeutige Funktionen von  $z$  sind, so daß  $(dT/dz)_p$  und  $(dp/dz)_T$  Differentialgesetze für die Zustandsgleichung darstellen. (Da aus der gegebenen Entropie die Zustandsgleichung

stets durch bloße Differentiation gefunden werden kann, erscheint dem Ref. die obige Einführung von  $z$  zumindest für die Bestimmung der Zustandsgleichung einen Umweg zu bedeuten.) Da nach Ansicht des Verf. die Abweichungen vom idealen Verhalten allein durch Molekül ASSOZIIATIONEN bedingt sein sollen, werden weiterhin einige allgemeine statistische Überlegungen angestellt, aus denen auf die statistischen Gewichte und die Wärmetönungen der einzelnen Assoziationen geschlossen werden soll.

W. Glaser (Prag).

**Meixner, J.: Reversible Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen.** Ann. Physik, V. F. 41, 409—425 (1942).

Untersuchung der Frage, ob es für Flüssigkeiten und Gase reversible Zustandsänderungen gibt, die nicht beliebig langsam ablaufen. Die Änderung ist dann reversibel, wenn die Entropieerzeugung Null ist. Setzt man die Volumenviskosität nicht gleich Null, so gibt es nur solche Bewegungen der verlangten Eigenschaft, bei denen sich das Medium wie ein starrer Körper bewegt, und zwar besteht die Bewegung aus einer Verschiebung mit konstanter Beschleunigung und einer Drehung mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit. Setzt man die Volumenviskosität gleich Null, so haben auch radiale Zusammenziehungen oder Ausdehnungen die geforderte Eigenschaft, reversibel mit endlicher Geschwindigkeit abzulaufen: für gewisse Zustandsgleichungen (z. B. für ideale Gase mit konstanter spezifischer Wärme, auch für Mischungen solcher Gase) gibt es auch allgemeinere reversible Zustandsänderungen endlicher Geschwindigkeit. Für eindimensionale Bewegungen idealer Gase sind solche Zustandsänderungen schon vom Ref. (dies. Zbl. 26, 369) angegeben worden. Kritik der von C. Eckart (dies. Zbl. 26, 280) gegebenen Kriterien des thermodynamischen Gleichgewichts.

Bechert (Gießen).

**Verschaffelt, J. E.: Sur la thermomécanique de la conduction calorifique.** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 28, 436—454 (1942).

**Verschaffelt, J. E.: La thermomécanique de la diffusion des gaz.** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 28, 455—475 (1942).

**Verschaffelt, J. E.: Sur la thermomécanique des fluides en mouvement.** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 28, 476—489 (1942).

Verf. hat sich in einer Reihe von Arbeiten [Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 24, 593, 610, 615 (1938) und dies. Zbl. 24, 372] mit der Thermomechanik der Wärmeleitung, der Diffusion und der inneren Reibung beschäftigt. In den vorliegenden Arbeiten, die sich im wesentlichen auf stationäre Systeme beziehen, vergleicht er seine Ergebnisse mit denen von W. Meissner (Thermodynamische Behandlung stationärer Vorgänge in Mehrphasensystemen [Ann. Physik, V. s. 32, 115 (1938)]) und insbesondere mit denen des Ref. (dies. Zbl. 25, 122). Er weist darauf hin, daß seine „reduzierte nichtkompensierte Wärme“ mit der lokalen Entropieerzeugung in der Bezeichnungsweise des Ref. übereinstimmt. Eingehend setzt er sich mit dem Begriff der Konvektionsgeschwindigkeit in einer Mischung von Gasen auseinander, die man als mittlere Teilchengeschwindigkeit oder als Schwerpunktgeschwindigkeit der in einem Volumenelement enthaltenen Teilchen definieren kann: um alle diese Möglichkeiten einheitlich zu erfassen, führt er für jede Komponente der Gasmischung eine besondere Masseneinheit ein. (Nach Meinung des Ref. gibt jedoch nur die Schwerpunktgeschwindigkeit eine für dynamische Betrachtungen geeignete Definition der Konvektionsgeschwindigkeit.) Im einzelnen ergeben sich einige Widersprüche zwischen den Ergebnissen des Verf. und des Ref. So erhält Verf. für den Energiesatz und für die lokale Entropieerzeugung im Falle der Diffusion einen anderen Ausdruck, woraus er schließt, daß die diesbezüglichen Ergebnisse des Ref. unexakt sind. Ferner bestreitet er die Richtigkeit der Bewegungsgleichung einer Gasmischung, die vom Ref. in der Form  $\rho \frac{du}{dt} = -\text{grad } p$ , wenn man von innerer Reibung absieht ( $\rho$  = Dichte,  $u$  = Geschwindigkeit,  $p$  = Druck,  $\frac{d}{dt}$  = substantielle Differentiation), angesetzt ist. Er begründet das so, daß in einer



horizontalen Röhre, in der stationäre Diffusion besteht und der Druck konstant ist, nach dieser Bewegungsgleichung  $u \operatorname{grad} u = 0$  „und daher  $u = 0$ “ gelten müßte, d. h. kein Transport von Materie stattfinden könnte. — (Man kann aber hier nur auf  $u = \text{konstant}$  schließen, womit der vom Verf. gefundene Widerspruch wegfällt. An dieser Stelle sei ferner nur kurz bemerkt, daß die angezweifelte Ergebnisse des Ref. in voller Übereinstimmung mit den nach der kinetischen Gastheorie gewonnenen Ergebnissen von D. Enskog [Dissertation Upsala 1917] stehen, und daß sich daher die Einwände des Verf., sollten sie stichhaltig sein, auch auf die Enskogsche Arbeit beziehen würden. D. Ref.)

*J. Meixner (Aachen).*

**Verschaffelt, J. E.:** *La thermomécanique des processus irréversibles.* Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 28, 490—495 (1942).

Von Bridgman [Phys. Rev., II. s. 58, 845 (1940)] wurde der Gedanke ausgesprochen, daß die bei einem irreversiblen Prozeß pro Sekunde stattfindende Entropievermehrung sich aus den Zustandsgrößen des Systems (wozu hier auch Temperaturgradient usw. gehören) berechnen läßt. Verf. weist darauf hin, daß er diese Meinung schon seit 1934 in einer Reihe von Arbeiten vertreten hat. Ferner übt er Kritik an einer bei Bridgman nach Eckart (dies. Zbl. 26, 280) zitierten Formel für die Entropiezunahme eines einheitlichen fluiden Mediums in einem abgeschlossenen System, und schließlich gibt er Ausdrücke für die Energiedissipation an, die bei der Diffusion, inneren Reibung und Wärmeleitung auftritt.

*J. Meixner (Aachen).*

**Babbitt, J. D.:** *The diffusion of water vapour through a slit in an impermeable membrane.* Canad. J. Res. 19, Sect. A, 42—55 (1941).

Für praktische Anwendung bei der Isolierung von Hauswänden wird der stationäre Diffusionsstrom eines auf der einen Seite einer Sperebene erzeugten, auf der anderen Seite wegkondensierten Dampfs durch Füllgas und Spalt hindurch betrachtet. Der Diffusionsstrom wird unter Berufung auf Stefan angesetzt zu  $\rho \dot{V} = D \nabla \ln(P - p) = D \nabla V$  ( $P$  der Gesamt-,  $p$  der Partialdruck des Dampfs). Da im stationären Fall gleichzeitig  $\partial \rho / \partial t = - \nabla \cdot (\rho \dot{V}) = 0$ , so folgt die Laplacesche Differentialgleichung  $\Delta V = 0$  und damit im zweidimensionalen Fall die Möglichkeit der Erledigung des Diffusionsstromproblems durch komplexe Abbildung. Der auf diese Weise berechnete Integralstrom durch den Spalt wird in befriedigender Übereinstimmung mit Experimenten gefunden.

*Fues (Breslau).*

**Malkin, J.:** *On the problem of temperature distribution in plane plates.* J. Franklin Inst. 232, 129—150 (1941).

Verf. untersucht zunächst das Problem der stationären Wärmeleitung in einer ebenen dünnen Platte, wenn die Temperatur an den Wänden ungleichförmig, aber durch Polynome in den Koordinaten ausdrückbar ist. Das Problem wird mit einfachen Methoden gelöst, unter der (intuitiv richtigen und durch spezielle Lösungen leicht zu beweisenden) Annahme, daß der Einfluß der Temperaturverteilung auf den Seitenwänden der Platte vernachlässigt werden kann. Verf. erweitert dann seine Ergebnisse auf die Wärmeleitung in einer Platte, deren Wände Wärme infolge äußerer Leitfähigkeit abgeben oder empfangen sowie auf die nichtstationäre Wärmeleitung.

*Dario Graffi (Bologna).*

## **Elektrodynamik:**

● **Lehrbuch der drahtlosen Nachrichtentechnik.** Hrsg. v. Nicolai v. Korshenewsky und Wilhelm T. Runge. Bd. 4: Verstärker und Empfänger. Bearb. v. M. J. O. Strutt. Berlin: Springer 1943. XIV, 384 S. u. 425 Abb. RM. 33.—

**Westphal, Wilhelm H.:** *Zur Definition der magnetischen Größen.* Z. Physik 119, 164—166 (1942).

Wenn man die Magnetisierung als Funktion der Feldstärke  $B$  (nicht  $H$ ) ansieht und bei Proportionalität den Faktor im diamagnetischen Fall positiv setzt, so erhält man Übereinstimmung der Gleichungen mit denen der Elektrostatik. *F. Hund.*

**Kneissler-Maixdorf, L.:** Zur Theorie des magnetischen Feldes. Arch. Elektrotechn. **36**, 471—483 (1942).

Mit Hilfe der Fassung der Maxwell'schen Theorie, die die Magnetisierung durch Elementarströme ausdrückt ( $c \operatorname{rot} \mathfrak{M} = \mathfrak{p}$ ), werden die magnetischen, besonders die ferromagnetischen Erscheinungen diskutiert.

*F. Hund* (Leipzig).

**Usunoff, Grigor A.:** Erzeugung von Vierpolen gleicher Kettenwiderstände durch Matrizen transformation. Arch. Elektrotechn. **36**, 687—692 (1942).

Sei  $Z^*$  die durch Vorzeichenumkehr der zweiten Spalte aus der symmetrischen Matrix  $Z$  der Vierpol-Leerlaufwiderstände gewonnene Matrix. Die eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von  $Z^*$  und die andere mit dem Faktor  $-1$  versehen liefern dann die Kettenwiderstände (iterative impedances). Die  $Z^*$ -Matrix  $S^{-1}Z^*S$  besitzt dieselben Kettenwiderstände. Es werden einige Beispiele angegeben, für die  $S^{-1}Z^*S$  realisierbar ist:  $T$ -Glieder (führt auf Zobel'sche „ $m$ “-Type) und überbrücktes  $T$ -Glieder, beides „symmetrische“ ( $Z_{11} = Z_{22}$ ) Vierpole (Kettenwiderstand = Wellenwiderstand), mit Einschränkung für  $S$ .

*Cauer* (Berlin).

**Laue, M. v.:** Eine Ausgestaltung der Londonschen Theorie der Supraleitung. Ann. Physik, V. F. **42**, 65—83 (1942).

In den phänomenologischen Londonschen Gleichungen zur Beschreibung des supraleitenden Zustandes wird neben dem Suprastrom ein gewöhnlicher Ohmscher Strom berücksichtigt. Dabei ergeben sich folgende wesentlich neuen Gesichtspunkte. Im Fall stationärer Bedingungen ist der Ohmsche Strom kurz geschlossen. Die Gleichungen reduzieren sich auf die ursprüngliche Londonsche Form. Der Ohmsche Widerstand wirkt um so mehr, je weniger Zeit bleibt zum Ladungsaustausch durch den trägen Supraleitungsmechanismus. Für Zentimeterwellen gelten praktisch noch die Londonschen Gleichungen, für ultrarote und kürzere Lichtwellen überwiegt die Wirkung des Ohmschen Widerstands. Ladungen im Innern des Supraleiters (die in der Londonschen Theorie überhaupt nicht zugelassen sind) gehen an die Oberfläche. Die ungedämpften Schwingen der einfachen Londonschen Theorie sind nicht möglich. Diese Betrachtungen legen den Gedanken nahe, daß der Supraleitungsmechanismus nicht aus dem der Normalleitung hervorgeht, sondern als etwas Neues neben diesen tritt.

*Fritz Bopp* (Breslau).

**König, H.:** Anschauliche Ableitung einiger Näherungsformeln aus der Theorie der Stromverdrängung. Helv. phys. Acta **5**, 433—444 (1942).

Verf. beschäftigt sich mit der Wechselstromverteilung in einem geraden Leiter kreisrunden Querschnitts, in einer unendlich ausgedehnten Platte mit ebenen parallelen Begrenzungen und in einer geschichteten Platte. Bei dieser Berechnung geht Verf. als nullter Näherung von der Gleichstromverteilung in den genannten Leitern, welche homogen ist, aus. Aus dieser Gleichstromverteilung berechnet er die Verteilung der magnetischen Feldstärke im Leiterquerschnitt und aus dieser magnetischen Feldstärke die erste Korrektur der elektrischen Feldstärke, welche zur Gleichstromfeldstärke addiert wird. Dieses Verfahren kann dann bis zu höheren Korrekturgliedern fortgesetzt werden. Aus der in dieser Weise ermittelten Feldstärkeverteilung und Stromdichteverteilung ergibt sich dann unmittelbar der Wechselstromwirkwiderstand sowie die Induktivität. Verf. führt die Verfahren für die obengenannten Leiterformen bis in zweiter Näherung durch und gibt auch die entsprechenden Formeln für den Widerstand und die Induktivität je Längeneinheit des Leiters. Zum Schluß vergleicht er das von ihm angewandte und übrigens aus dem (vom Verf. nur lückenhaft zitierten) Schrifttum wohlbekannte Verfahren mit den Rechnungsverfahren anderer Forscher.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Egloff, Werner:** Zur Berechnung des Wechselstromwiderstandes geschichteter zylindrischer Leiter. Elektr. Nachr.-Techn. **19**, 191—196 (1942).

Es handelt sich um die Wechselstromleitung in einem Leiter kreiszylindrischen



Querschnitts, der aus einem Kern und einem konzentrischen Mantel besteht, welche verschiedene Werte der magnetischen Permeabilität und der elektrischen Leitfähigkeit aufweisen. Für das Verhältnis des Wechselstromwiderstandes eines solchen Leiters zum Gleichstromwiderstand geht Verf. von einer bekannten Formel aus. Diese Formel behandelt er zunächst für die beiden Grenzfälle eines homogenen Leiters ohne Mantel und eines leitenden Mantels ohne Kern. Darauf wendet er sich der allgemeinen Formel zu und wertet diese im Bereich niedriger Frequenzen durch Reihenentwicklung der in ihr auftretenden Besselschen Funktionen erster und zweiter Art mit komplexen Argumenten aus. Einführung der Reihen, welche mit der hypergeometrischen Reihe in Zusammenhang gebracht werden, in den Ausgangsausdruck liefert unmittelbar den Wechselstromwiderstand im Bereich niedriger Frequenzen. Für höhere Frequenzen werden die asymptotischen Formeln der genannten Besselschen Funktionen verwendet, und hierdurch gelangt Verf. zu verhältnismäßig einfachen Formeln für den Wechselstromwiderstand, welche nur trigonometrische und hyperbolische Funktionen enthalten. Die berechneten Ausdrücke werden numerisch ausgewertet und kurvenmäßig dargestellt.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Niessen, K. F.:** Über die angenäherte Erdabsorptionsformel für vertikale Dipole. *Physica, Haag* **9**, 915—922 (1942).

In frühere Arbeiten des Verf. zu diesem Thema haben sich nach Sommerfeld und Renner (dies. Zbl. **26**, 281) einige Rechenfehler geschlichen, und das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die früher gegebenen Formeln und Kurven in entsprechender Weise zu korrigieren. Es handelt sich dabei insbesondere um den Teil  $T$  der gesamten, von einem vertikalen Dipol, der sich in gegebener Höhe über einer ebenen Erdoberfläche befindet, ausgestrahlten Leistung, der von der Erdoberfläche absorbiert wird. Nachdem er kurz auf die Ursachen für die Fehler in seinen früheren Rechnungen hingewiesen hat, gibt Verf. einen neuen Ausdruck für  $T$  als Funktion des komplexen Brechungsindex der Erdoberfläche sowie des Verhältnisses der Höhe des Dipols über der Erde zur Wellenlänge. Die betreffende Formel wird numerisch in einer Reihe von Kurven ausgewertet, welche  $T$  bei verschiedenen Werten der genannten beiden unabhängigen Veränderlichen darstellen. Eine Reihe der früheren Kurven bedarf, wie Verf. ausführt, nur geringer Änderungen, um sie mit der korrigierten neuen Formel in Einklang zu bringen.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Borgnis, F.:** Die magnetische Grundschwingung des kreiszylindrischen Hohlraums. *Hochfrequenztechn.* **60**, 151—155 (1942).

Ein Hohlraum, der von einem Kreiszylinder und zwei parallelen Ebenen senkrecht zur Zylinderachse begrenzt wird, weist dann die niedrigste elektromagnetische Eigenfrequenz auf, wenn in Richtung der Zylinderachse kein elektrisches Feld vorhanden ist. Diese als magnetische Grundschwingung bezeichnete Eigenschwingung gehört nur dann zur niedrigsten Eigenfrequenz, falls die Zylinderlänge nicht kleiner ist als der Zylinderdurchmesser. Verf. schreibt zunächst die verschiedenen Komponenten der elektrischen und der magnetischen Feldstärke an und berechnet die Eigenfrequenz als Funktion der Zylinderlänge und des Zylinderdurchmessers, wobei er insbesondere auf den Fall der vorgegebenen Zylinderoberfläche eingeht. Hierauf berechnet er die Dämpfung der betreffenden Eigenfrequenz und zeigt, daß dieselbe als Funktion des Verhältnisses von Zylinderhalbmesser zu Zylinderlänge ein Minimum aufweist. Weiter geht er auf den Fall der elektrischen Grundschwingung ein, gibt für diese auch ebenfalls die Eigenfrequenz an und vergleicht dieselbe mit der Eigenfrequenz der magnetischen Grundschwingung. Sodann berechnet Verf. die Dämpfung für die elektrische Grundschwingung und vergleicht dieselbe mit derjenigen der magnetischen Grundschwingung. Bei der Berechnung der Dämpfung ergeben sich Integrale, deren Integranden Besselsche Funktionen enthalten und die in einem Anhang ausgeführt werden.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Fränz, K.: Die Amplituden von Geräuschspannungen.** Elektr. Nachr.-Techn. **19**, 166—173 (1942).

Im Anschluß an frühere Arbeiten wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Amplituden von Geräuschspannungen in linearen und in nichtlinearen Netzwerken berechnet, wobei neben der Behandlung von Beispielen besonders allgemeine Verfahren entwickelt werden. Es werden die Amplitudenverteilungen in Zwischenfrequenzverstärkern und am Ausgang von quadratischen Gleichrichtern berechnet. *E. Haak.*

**Kaufmann, H.: Der Eingangswiderstand der Dipol-Antennen.** Hochfrequenztechn. **60**, 160—168 (1942).

Bei der Berechnung des Eingangswiderstandes und insbesondere auch der Dämpfung von Strahlungsgebilden, welche auf einem geraden Leiter bestehen, ging man früher meistens von einer einwelligen elektrischen Stromverteilung entlang der Leiterlänge aus, welche aus der Analogie eines solchen Antennenleiters mit einer Doppelleitung geschlossen wurde. Es zeigte sich aber bald, daß diese Berechnung keine Resultate ergab, welche mit der Beobachtung im Einklang standen. Daher wurde vorgeschlagen, bei der Berechnung des Strahlungswiderstandes von einem korrigierten Ausdruck für die Stromverteilung auszugehen, indem die Dämpfung bereits durch eine komplexe Fortpflanzungskonstante implizite berücksichtigt ist. Verf. entwickelt den Strahlungswiderstand nach Potenzen des Verhältnisses des reellen zum imaginären Teil dieser Fortpflanzungskonstante. Durch ein graphisches Verfahren werden aus dem berechneten Strahlungswiderstand die richtigen Werte für die Dämpfung erhalten. Diese werden vom Verf. kurvenmäßig in Abhängigkeit des Wellenwiderstandes dargestellt. Hierauf wendet er sich dem Eingangsleitwert der Antennen zu und stellt auch diesen als Funktion des Wellenwiderstandes dar. Hierbei wird insbesondere auf die Abweichung des genauen Eingangsleitwertes von demjenigen der früheren einfachen Theorie eingegangen. In einem Anhang werden die ausgeführten Integrale, welche mit dem Integralsinus und dem Integralcosinus zusammenhängen, zusammengestellt.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Grosskopf, J.: Das Strahlungsfeld eines vertikalen Dipolenders über geschichtetem Boden.** Hochfrequenztechn. **60**, 136—141 (1942).

Nach dem Vorgang H. Weyls stellt Verf. den Hertzschen Vektor eines Dipols mit vertikal gerichteter Achse über einem ebenen Erdboden, der aus mehreren Schichten besteht, durch ein Integral über sämtliche ebenen Einzelwellen dar, welche der Dipol in verschiedene Richtungen aussendet. Als Faktor tritt im Integranden ein Reflexionskoeffizient auf, der für jede bestimmte Strahlungsrichtung in einfacher Weise mit den Eigenschaften des Erdbodens zusammenhängt. Nachdem Verf. diesen Berechnungsvorgang Weyls für einen ungeschichteten homogenen Erdboden erläutert hat, wendet er sich dem Fall des geschichteten Bodens zu, der sich vom vorhergehenden im wesentlichen durch einen anderen Reflexionskoeffizienten unterscheidet. Verf. berechnet diesen Koeffizienten aus dem Brechungsgesetz an den Grenzflächen zwischen den verschiedenen Schichten für einen zweischichtigen Erdboden. Einsetzen dieses Koeffizienten in die Weylsche Formel ergibt für die Ausbreitungsfunktion formal den gleichen Ausdruck wie bei einem ungeschichteten Boden, nur mit anderer Definition eines als numerische Entfernung bezeichneten Parameters. Die Ermittlung des effektiven Brechkoeffizienten aus einem komplexen Tangenzrelief wird vom Verf. kurz erörtert. Im Schrifttum des Verf. fehlt die einschlägige Arbeit von W. H. Wise [Bell. Syst. Techn. J. **8**, 662 (1929)].

*N. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Page, Leigh: Magnetic moments at high frequencies.** Phys. Rev., II. s. **60**, 675—684 (1941).

Verf. berechnet zunächst das magnetische Moment einer leitenden Kugel mit konstanter magnetischer Permeabilität in einem homogenen elektromagnetischen Wechselfeld. Hierzu geht er von den Maxwell'schen Gleichungen aus und erhält auf Grund der Stetigkeitsbedingungen an der Kugeloberfläche eine Reihenentwicklung des



Feldes in der Kugel nach abgeleiteten Legendreschen Polynomen. Hieraus ergibt sich nach längerer Rechnung das magnetische und das elektrische Moment. Die betreffenden Werte werden in Abhängigkeit der Leitfähigkeit, der magnetischen Permeabilität und des Kugelradius für verschiedene Frequenzen tabellenmäßig dargestellt. Die Ergebnisse werden dazu angewandt, das Verhalten eines Pulvers, das aus Kugeln besteht, im elektromagnetischen Felde zu berechnen. Die berechneten Werte werden mit gemessenen verglichen und in befriedigender Übereinstimmung befunden. Weiter geht Verf. auf die Berechnung der elektrischen und magnetischen Momente eines Kreiszylinders in einem homogenen Wechselfeld, dessen magnetische Feldstärke parallel zur Zylinderachse schwingt, ein. Auch diese Daten werden auf ein ferromagnetisches Pulver im Wechselfeld angewandt.

*M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Schriever, O.: Eine anschauliche Darstellung der Theorie der inhomogenen ebenen Welle.** Hochfrequenztechn. 60, 100—104 (1942).

Verf. macht den dankenswerten Versuch, die Vorgänge beim Übertritt einer inhomogenen ebenen Welle von einem beliebigen Medium in ein anderes Medium anschaulich darzustellen. Gewöhnlich ersetzt man hier formal den reellen Brechungsquotienten durch einen komplexen, wobei man zu einem „komplexen Brechungswinkel“ gelangt, der in keiner geometrischen Beziehung zu den Richtungen der Phasen- und Amplitudenebenen steht. An Hand von Skizzen wird der Vorgang des Übertritts der Welle anschaulich aufgezeigt für absorbierende und nichtabsorbierende Medien und die Richtung der Amplituden- und Phasenebenen betrachtet. Darauf fußend wird die Wellenfunktion der inhomogenen ebenen Welle aufgestellt und über die darin vorkommenden Konstanten so verfügt, daß sowohl die Wellengleichung wie die Grenzbedingungen befriedigt werden. Auch der Vorgang der Totalreflexion wird von der Darstellung miterfaßt. Zum Schluß werden die Intensitätsverhältnisse betrachtet und frühere Darstellungen berichtigt.

*K. Krüger (Berlin-Gatow).*

**Kleinsteuber, W.: Das zylindrische Bremsfeld.** Hochfrequenztechn. 61, 38—47 (1943).

Es wird zunächst die an und für sich bekannte Bewegung eines Elektrons im zylindrischen Bremsgleichfeld mit den Gleichspannungen  $U_g$  und  $U_b$  auf eine besondere, auch gerade bei Wechselspannung geeignete Form gebracht. Als Parameter werden dabei verwendet der Laufwinkel  $\alpha$ , der Umkehrradius  $r_u$  und eine besondere Hilfsgröße  $M$ . — Im Abschnitt III wird die Bewegung im Wechselfeld untersucht, wenn das zusätzliche Wechselfeld klein ist gegenüber dem Gleichfeld. Die Bewegungsgleichungen lassen sich auf zwei Grundfunktionen zurückführen. Diese entarten zu den Werten 1 und  $x$  in dem besonders einfachen Falle, daß der Gitterradius sehr groß ist im Verhältnis zum Gitterbremsanodenabstand. Die Abschnitte IV und V behandeln die Frage nach dem Influenzstrom und erörtern die Bedeutung eines Gleichstroms, der durch das Gitter in den Gitterbremsselektrodenraum eintritt. — Bei kleiner Wechselfeldamplitude kann der Vorgang der Elektronenströmung unter dem Ersatzbild der Parallelschaltung eines Wirkleitwertes, der in Phase mit der Spannung liegt, und eines Blindleitwertes betrachtet werden. Diese beiden Ersatzleitwerte werden in zwei Bildern in Funktion des Laufwinkels  $\alpha$  für verschiedene Werte von  $M$  als Parameter dargestellt. Daraus ergeben sich dann auch die Kurven konstanten Leitwertes in der Ebene der Spannungen mit  $U_g$  als Abszisse und  $U_b$  als Ordinate. — Schließlich wird auch noch der Fall einer endlichen Amplitude überschläglich behandelt.

*Buchholz (Berlin).*

## **Optik:**

**Schardin, Hubert: Die Schlierenverfahren und ihre Anwendungen.** Ergeb. exakt. Naturwiss. 20, 303—439 (1942).

Der Bericht bietet eine wohl erstmalige zusammenfassende Darstellung der als Schlierenverfahren (abgekürzt S.V.) bezeichneten optischen Meßmethoden. Verf. faßt den Begriff der Schliere weiter als es in der Glastechnik sonst üblich ist, wo nur Stellen

mit geänderter Brechzahl als solche verstanden werden, indem er die Ursache für jede auf ein verhältnismäßig kleines Gebiet beschränkte irreguläre Ablenkung des Lichtes als Schliere bezeichnet. Schlieren sind hiernach die auf Dickenänderung beruhenden Ziehstreifen bei Maschinenglas; aufsteigende Warmluft; Inhomogenitäten, die bei der Lösung von Salzen in Flüssigkeiten oder beim Mischen zweier Gase auftreten; laufende Schallwellen, die intensiv genug sind, um eine nachweisbare Lichtablenkung hervorzurufen; in der Ballistik: Kopf- und Schwanzwelle sowie der Wirbelkanal eines fliegenden Geschosses. Das Wesen der S.V. besteht in der Sichtbarmachung, Beobachtung, photographischen oder photoelektrischen Registrierung und Vermessung geringer Lichtablenkungen. Während man sich früher mit der qualitativen Auswertung, dem Nachweis vom Vorhandensein und der Lage der Schlieren, sowie einfachen quantitativen Ergebnissen über die Form der Schlieren und die genauere Bestimmung der räumlichen Ausdehnung begnügte, gestatten die neueren Verfahren, die Größe der Lichtablenkung quantitativ zu messen und daraus in gewissen Fällen wichtige Rückschlüsse auf den physikalischen Zustand in der Schliere selbst zu gewinnen. Aus der für die Berechnung der Lichtablenkung grundlegenden Gleichung der theoretischen Optik  $1/R = (\text{grad } n) (\sin \varphi) / n$  ( $R$  Krümmungsradius des Lichtstrahls,  $n$  Brechungsindex,  $\varphi$  Winkel zwischen  $\text{grad } n$  und der Lichtstrahlrichtung) gewinnt Verf. unter der Annahme, daß der Lichtstrahl innerhalb der Schliere nahezu geradlinig verläuft, für die Komponenten der Ablenkung eines Lichtstrahles, der durch den Punkt  $x_i, y_k$  einfällt, die Ausdrücke

$$(\varepsilon_x)_{x_i, y_k} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)_{x_i, y_k} dz, \quad (\varepsilon_y)_{x_i, y_k} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial y} \right)_{x_i, y_k} dz.$$

Bei gegebenem  $n$  läßt sich hieraus die Lichtablenkung  $\varepsilon$  berechnen. Tatsächlich handelt es sich aber umgekehrt um die Bestimmung der Ortsfunktion  $n$ , nachdem  $\varepsilon$  durch Auswertung einer Schlierenaufnahme gefunden wurde. Für drei Sonderfälle werden die Lösungen dieser Aufgabe angegeben: 1) Zylindrisches Feld. Der Zustand in der Schliere wird auf Parallelen zur  $z$ -Achse konstant angenommen. Bei Begrenzung des zu untersuchenden Vorganges durch zwei planparallele Glasplatten findet man den Brechungsindex durch Integration vom Rande des Vorganges her

$$n_{x,y} = n_0 + (n_0/l_s) \int \varepsilon_x^* dx \quad \text{oder} \quad n_{x,y} = n_0 + (n_0/l_s) \int \varepsilon_y^* dy$$

( $l_s$  Ausdehnung der Schliere in der  $z$ -Richtung,  $\varepsilon^* = (n/n_0)\varepsilon$  die wirklich gemessene Lichtablenkung). — 2) Rotationssymmetrisches Feld. In der  $xz$ -Ebene werden die Kurven mit konstantem  $n$  als konzentrische Kreise angenommen. Bei Unterteilung des Querschnittes in konzentrische Ringe, wobei in jedem Ring  $\partial n / \partial r = \text{konst.} = \mu_\lambda$ ,  $\partial n / \partial y = \text{konst.} = \nu_\lambda$  gesetzt wird, ergibt sich die Gesamtablenkung des  $i$ -ten Lichtstrahles als Summe über die Einzelablenkungen in den verschiedenen Ringen

$$(1) \quad (\varepsilon_x)_{x_i, y_k} = 2 \frac{x_i}{n_0} \sum_{\lambda=1}^i \mu_\lambda \left[ \text{Arc Cos} \frac{r_{\lambda-1}}{x_i} - \text{Arc Cos} \frac{r_\lambda}{x_i} \right],$$

$$(2) \quad (\varepsilon_y)_{x_i, y_k} = 2 \frac{x_i}{n_0} \sum_{\lambda=1}^i \nu_\lambda \left[ \sqrt{\frac{r_{\lambda-1}^2 - x_i^2}{x_i^2}} - \sqrt{\frac{r_\lambda^2 - x_i^2}{x_i^2}} \right].$$

Mit den für den Lichtstrahl  $L_i$  gemessenen Werten für  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_y$  erhält man hieraus der Reihe nach sämtliche Koeffizienten  $\mu_i, \nu_i$  des Querschnittes, den Brechungsindex selbst durch Integration  $n(r, y) = \int_{r_0}^r (\partial n / \partial r) dr + n_0$ . — 3) Im kugelsymmetrischen

Feld genügt die Auswertung eines durch den Mittelpunkt des Feldes gehenden Querschnittes nach (1). — Da sich die S.V. überall da anwenden lassen, wo ein zu untersuchender Vorgang in einem durchsichtigen Medium eine Lichtablenkung hervorruft, mit ihrer Hilfe ferner die Form einer reflektierenden Oberfläche untersuchen läßt, ist



die Anwendungsmöglichkeit der S.V. sehr vielseitig. Verf. weist besonders darauf hin, daß die S.V. sich vielfach auch dort, wo ihre Anwendung bisher noch nicht üblich ist, als nützliches und einfaches experimentelles Hilfsmittel erweisen werden. Daher und aus systematischen Gründen wurde eine ganze Reihe solcher, teils anderweitig noch nicht veröffentlichter Verfahren beschrieben (I. S.V. mit optischer Abbildung des Objektes, u. a. die Toeplersche Anordnung und das Gitterblendenverfahren. II. S.V. ohne optische Abbildung des Objektes, das direkte Schattenverfahren und die Umkehr hiervon). Die theoretischen Grundlagen für die quantitative Auswertung werden im III. Abschnitt, Ausführungen über die Anwendung der S.V. im IV. Abschnitt mitgeteilt. Es sei hier nur kurz an die Bedeutung der S.V. in Ballistik und Strömungsforschung erinnert. In der Ballistik dienen sie hauptsächlich zur Untersuchung der Strömungserscheinungen in der Umgebung des fliegenden Geschosses, der Vorgänge an der Mündung einer Waffe und der Detonation eines Geschosses, insbesondere also zur Untersuchung der Form und Ausbreitung von Stoßwellen. Zur Untersuchung der Umströmung eines Profils mit Überschallgeschwindigkeit erweisen sich die S.V. wegen der in der Strömung auftretenden endlichen Dichteunterschiede bzw. Dichtesprünge besonders geeignet. Ausgezeichnetes Bildmaterial (teils mehrfarbige Tafeln) vermittelt einen anschaulichen Eindruck von der allgemeinen Bedeutung dieser optischen Meßmethoden.

Garten (Leipzig).

**Odone, F.: Propagazione, secondo l'ottica geometrica, di un raggio luminoso monocromatico in un mezzo isotropo eterogeneo.** Nuovo Cimento, N. s. **19**, 157—168 (1942).

Verf. behandelt die Frage der Ausbreitung des Lichtes in einem inhomogenen, aber isotropen Medium auf Grund der geometrischen Optik. Hierbei nimmt er an, daß die Lichtstrahlen monochromatisch sind. Die vom Verf. abgeleiteten Formeln gehen nach Ansicht des Ref. über die diesbezüglichen bekannten Formeln nicht hinaus. Im einzelnen geht Verf. auf die beiden Fälle ein, daß 1. die Flächen gleichen Brechungsindex eben und einander parallel sind und daß 2. jene Flächen kugelförmig und konzentrisch sind. Im 1. Fall findet er wieder, daß  $n \sin i = \text{const}$ , im 2. Fall, daß  $nr \sin i = \text{const}$  ist.

Picht (Babelsberg).

**Boutarie, Augustin: Formule des lentilles minces établie par la théorie de la diffraction.** Rev. Opt. **19**, 74—77 (1940).

Der Verf. berechnet für eine dünne Linse den Lichtwegunterschied eines zentralen und eines außersaxialen Strahles und bestimmt, indem er die in diesem Lichtwegausdruck auftretenden Größen durch die üblichen Größen, die in der geometrischen Optik für die Linse charakteristisch sind, benutzt, die Beziehung, die zwischen diesen Größen bestehen muß, damit der Lichtweg ein Maximum ist. Er findet so die übliche Abbildungsformel der geometrischen Optik für dünne Linsen. Die Frage wurde in gleicher oder ähnlicher Art bereits früher von anderen Verff. behandelt.

Picht.

**Mélon, J.: Détermination des biréfringences principales d'un biaxe en lumière convergente.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **11**, 310—318 (1942).

Es wird die Interferenzerscheinung benutzt, die eine senkrecht zu einer der drei Hauptrichtungen stehende Platte im konvergenten Lichte bietet, und zwar soll die Verzögerung  $R$  des einen durchgehenden Strahls gegen den andern beobachtet werden, die zu einem Austrittswinkel  $\varphi$  gehört.  $e$  sei die Dicke der Platte,  $\alpha, \beta, \gamma$  seien die drei Hauptbrechwerte,  $\alpha < \beta < \gamma$ , also  $(\alpha\gamma)$  die Ebene der optischen Achsen. Ist die Platte senkrecht zur  $\alpha$ -Richtung, so wird für einen in der  $(\alpha\beta)$ -Ebene austretenden Strahl 1)  $\frac{R}{e} = \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \varphi} - \beta \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\alpha^2}}$ , für einen in der  $(\alpha\gamma)$ -Ebene austretenden 2)  $\frac{R'}{e} = \pm \left( \gamma \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi'}{\alpha^2}} - \sqrt{\beta^2 - \sin^2 \varphi'} \right)$ , für einen senkrecht austretenden 3)  $\frac{R_0}{e} = \gamma - \beta$ . Aus solchen drei Beobachtungen kann man  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmen, man gelangt zu einer Gleichung 4. Grades. Der Verf. empfiehlt, einen Brechwert unmittelbar

zu messen und die beiden andern mit Hilfe von 3) und 1) oder 2) abzuleiten. Er gibt auch die ähnlichen Formeln für Platten senkrecht zur  $\beta$ - oder  $\gamma$ -Richtung an, macht mehrere Bemerkungen über die zweckmäßigste Art der Beobachtung und die nötige Genauigkeit und teilt einige Beispiele mit. *Hans Boegehold (Jena).*

**Rosin, Seymour, and Orrin H. Clark:** Analysis of optical systems. J. opt. Soc. Amer. **31**, 460 (1941).

Die Verf. haben eine Formel abgeleitet, die für eine aus beliebig vielen Teilfolgen zusammengesetzte Linsenfolge den Abbildungsmaßstab jedes Dingpunktes durch die Brennweiten der Einzelfolgen und ihre Abstände darstellt: aus dieser Formel können die Grundpunkte bestimmt werden. Weiter wird sie angewandt, um für eine Änderung der optischen Konstanten Entwicklungen nach Taylorschen Reihen zu erhalten, insbesondere zu zeigen, wie die Brennweite und die Lage der Brennpunkte beeinflußt werden, wenn man die Halbmesser, Abstände und Brechwerte ändert. Die Formeln sind in dem kurzen Bericht nicht mitgeteilt. *Hans Boegehold (Jena).*

**Kavanagh, Arthur J.:** Unit planes of a plane-parallel plate. J. opt. Soc. Amer. **31**, 602—603 (1941).

Veranlaßt durch den Aufsatz von K. Pestrecov (s. dies. Zbl. **25**, 126) zeigt der Verf.: Wenn man eine Platte als Grenzfall einer Linse auffaßt, deren Halbmesser man ins Unendliche wachsen läßt, so können die Hauptpunkte, je nach der Art des Grenzübergangs, in jedes beliebige Paar einander in bezug auf die Platte entsprechender Punkte übergeführt werden; doch gibt es auch Arten des Grenzübergangs, die kein bestimmtes Ergebnis liefern. *Hans Boegehold (Jena).*

**Minnaert, M.:** The reflection of light in rippled surfaces. Physica, Haag **9**, 925—935 (1942).

Der Verf. beschäftigt sich mit der theoretischen Erklärung für eine Erscheinung, die man häufig in der Natur wahrnehmen kann. Das von einer weit entfernten Lichtquelle ausgehende und an einem System von parallelen Riffelungen (Kräuselungen) auf einer reflektierenden Fläche reflektierte Licht erscheint als ein schräg liegendes Lichtband (schräg liegender Lichtpfeiler = *slynting pillar of light*). Der Verf. berechnet die Neigung dieses schräg liegenden Lichtbandes in Abhängigkeit von der Richtung der Kräuselungen und der Lage des beobachtenden Auges. Er dehnt die Untersuchungen aus auf kreisförmige Riffelungen, wie sie etwa auf einer Wasseroberfläche durch auftreffende Regentropfen entstehen. Das hierbei auftretende Lichtband hat hyperbolische Form und geht durch das reflektierte Bild der Lichtquelle sowie durch den Mittelpunkt des Riffelungssystems. Der Verf. weist darauf hin, daß verschiedene täglich wahrnehmbare Beobachtungen nach dieser Theorie erklärt werden können, und daß die Art seiner Berechnung sehr allgemein ist und auf Riffelungen anwendbar ist die nach einem beliebigen Gesetz über eine Ebene verteilt sein können. *Picht.*

**Korff, Günther:** Ein Ausgleichsverfahren für die Koeffizientenbestimmung in der Potenzreihenentwicklung der sphärischen Aberration. Z. Instrumentenkde **63**, 81—90 (1943).

Es seien für eine Anzahl Werte der Einfallshöhe  $h$  die Werte  $z$  des Öffnungsfehlers bestimmt, dieser Fehler soll durch eine Funktion  $z = \sum_{x=1}^k a_x h^{2x}$  möglichst günstig dargestellt werden, und zwar empfiehlt Verf., sich auf 2 oder höchstens 3 Koeffizienten zu beschränken. Zunächst wird gesetzt  $h^2 = \frac{r^2}{2} (1 + y)$ , wo  $r$  die größte Öffnung ist, die Entwicklung nimmt dann die Form an  $z = \sum_{v=0}^k c_v y^v$ ;  $y$  geht von  $-1$  bis  $+1$ . Die Rechnung wird vereinfacht, wenn für solche Werte von  $h$  gerechnet ist, denen  $y$  Werte von gleichem Abstände entsprechen. Der Verf. untersucht die Fälle, daß es sich um  $y = -1, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +1$  oder um  $y = -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, +\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{4}, +1$  handelt. Für  $y = -1$  muß  $z = 0$  herauskommen; die übrigen  $z$  müssen nach der



Methode der kleinsten Quadrate möglichst günstig dargestellt werden. Der Verf. gelangt zu den Darstellungen  $z = c_0 + c_1 y + c_2 y^2$ ; wo  $c_0 = \alpha_0 C_1 + \beta_0 C_2$ ,  $c_1 = \alpha_1 C_1 + \beta_1 C_2$ ,  $c_2 = \alpha_2 C_1 + \beta_2 C_2$ ; und  $z = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3$ , wo  $c_0 = \alpha_0 C_1 + \beta_0 C_2 + \gamma_0 C_3$ ,  $c_1 = \alpha_1 C_1 + \beta_1 C_2 + \gamma_1 C_3$ ,  $c_2 = \alpha_2 C_1 + \beta_2 C_2 + \gamma_2 C_3$ ,  $c_3 = \alpha_3 C_1 + \beta_3 C_2 + \gamma_3 C_3$ . Hier sind die  $\alpha, \beta, \gamma$  Zahlenwerte, die verschieden sind, je nachdem 2 oder 3 Koeffizienten bestimmt werden sollen und je nachdem 4 oder 8 Werte von  $z$  berechnet sind; Der Verf. hat die  $\alpha, \beta, \gamma$  ein für allemal ausgerechnet. Die  $C$  hängen in ziemlich einfacher Weise von den berechneten  $z$ -Werten ab.

Hans Boegehold (Jena).

**Staeble, F.: Über eine Differenzenformel zur Sinus- und Isoplanasiebedingung mit Bemerkungen zur Seidelschen Theorie.** Z. Instrumentenkde. 62, 376—387 (1942).

Als Differenzenformel wird ein Ausdruck bezeichnet, mit dessen Hilfe man einen Fehler unmittelbar berechnen kann, statt auf dem Umwege über die Abweichung des tatsächlichen Wertes vom Sollwert; deshalb kann man mit einer niederstelligen Rechnung dieselbe Genauigkeit erreichen wie sonst mit einer hochstelligen. A. Kerber hat 1895 eine solche Formel für den Öffnungsfehler angegeben (Beiträge zur Dioptrik, Heft 1, Leipzig: Selbstverlag), indem er sich (in der Schreibweise des Normblatts DIN 1335) der Größe  $\vartheta = \sin \sigma' + \sin \varepsilon' - \sin \sigma - \sin \varepsilon = 4 \sin \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2} \cdot \sin \frac{\sigma' - \sigma}{2} \cdot \sin \frac{\varepsilon + \sigma}{2}$  bediente.

In der vorliegenden Arbeit geschieht dasselbe für die Isoplanasiebedingung. Als Hilfsgrößen benutzt der Verf. 1. Die „unechte Brennweite“  $f'_x = \frac{s'_1}{s_2} \cdot \frac{s'_2}{s_3} \dots \frac{s'_{x-1}}{s_x} \cdot s'_x = \frac{h_1}{h_x} \cdot s'_x = \frac{n_x}{n_1} \beta' s_1$ .

2. Die Energiezahl  $t$ , wo  $\frac{1}{t} = \frac{h_v}{h_1} \cdot \frac{y_v}{y_1} n_v \left( \frac{1}{z_v} - \frac{1}{s_v} \right) = \frac{h_v}{h_1} \cdot \frac{y_v}{y_1} n'_v \left( \frac{1}{z'_v} - \frac{1}{s'_v} \right)$  ( $v$  ist Zeiger einer beliebigen,  $x$  Zeiger der letzten Fläche;  $s_v, z_v, s'_v, z'_v$  die Gaußischen Bildweiten für Ding und Blende vor und nach der  $v$ -ten Fläche;  $t$  hat durch die ganze Folge denselben Wert). 3. Für jede Fläche die Länge  $q_v = \left( \frac{h_1}{h_v} \right)^2 \frac{1}{Q_v s}$ , wo  $Q_s = n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)$ . 4. Für jeden

Abstand die „Seidelsche Dicke“  $\hat{d}_{v-1,v} = \frac{h_1^2 d_{v-1,v}}{h_{v-1} h_v n_{v-1,v}}$ . 5. Für jede Fläche die

„Blendenlänge“  $b_v = \hat{d}_{B, \iota+1} + \hat{d}_{\iota+1, \iota+2} + \dots + \hat{d}_{v-1,v}$  (wenn die Öffnungsblende B zwischen der  $\iota$ -ten und  $\iota+1$ -ten Fläche liegt und  $v > \iota$  ist, für  $v < \iota$  wird  $b_v$  negativ). In der Kerberschen Art wird die Differenzenformel für den Öffnungsfehler  $\Delta s'_x = \hat{s}'_x - \hat{s}_x$  abgeleitet:

$$\frac{\Delta s'_x}{f'_x} = - \frac{\sum_1^x a_v}{n'_x \sin \sigma'_x}, \quad \text{wo} \quad a_v = \frac{h_v}{h_1} Q_v r_v \vartheta_v.$$

Weiter wird gesetzt  $\Delta f'_x = \frac{s_1 \sin \sigma_1}{\sin \sigma'_x} - f'_x$ , und dann wird die Abweichung von der Isoplanasiebedingung:

$$\frac{\Delta f'_x}{f'_x} - \frac{\Delta s'_x}{s'_x - z'_x} = - \frac{\sum_1^x a_v \left( q_v - t + \sum_1^v \hat{d} \right)}{f'_x \sin \sigma'_x} = - \frac{\sum_1^x b_v}{f'_x \sin \sigma'_x}, \quad \text{wo} \quad b_v = a_v (q_v + b_v).$$

Es folgen einige Bemerkungen über Beziehung der Isoplanasiebedingung zur Abbeschen Sinusbedingung und zur Kurvendarstellung bei M. v. Rohr. — Ferner werden Rechenvorschriften nebst Kontrollformeln zusammengestellt. — Für kleine Öffnungen ergeben sich natürlich die Seidelschen Formeln, wobei der Verf. einige Abänderungen im Rechenverfahren vorschlägt. Im Gegensatz zu Berek empfiehlt er die Blendenlage von vornherein zu berücksichtigen, auch macht er einige Bemerkungen über die beste Stellung der Blende.

Hans Boegehold (Jena).

**Korff, Günther: Das Prinzip der Totalundeutlichkeit bei der trigonometrischen Durchrechnung.** Z. Instrumentenkde. 63, 1—8 (1943).

Für die Totalundeutlichkeit hat der Verf. früher (vgl. dies. Zbl. 27, 180) den Ausdruck  $U = \int_0^r (e - z)^2 h^3 dh$  gegeben. Er wendet ihn jetzt unter der Annahme an, daß

man durch trigonometrische Durchrechnung die Längsabweichung  $z$  für eine Anzahl Höhen  $h$  bestimmt hat und bereits zu einer Flächenfolge gelangt ist, für die der Öffnungsfehler nicht sehr groß ist. Man kann  $z$  durch eine Summe  $z = a_{\kappa} h^{2\kappa}$  ausdrücken (das Summationszeichen  $\Sigma$  wird fortgelassen). Die  $a_{\kappa}$  bestimmt man aus den berechneten Abweichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate; der Verf. bemerkt, daß man oft mit zwei, fast immer mit drei Koeffizienten auskomme. Indem man dann von den Bestimmungsstücken  $p$  der Folge (Halbmessern, Abständen, Brech-

werten) einen nach dem andern ändert, kann man die Differenzenquotienten  $\frac{\Delta a_{\kappa}}{\Delta p_{\nu}}$  erhalten, die bei genügend kleinem  $p_{\nu}$  gleich den Differentialquotienten  $\alpha_{\kappa\nu} = \frac{\partial a_{\kappa}}{\partial p_{\nu}}$  sind. Für einen bestimmten Ausgangszustand ergibt sich dann als günstigste Einstellung  $\bar{e} = \frac{2a_{\kappa}}{\kappa + 2} r^{2\kappa}$ , als zugehöriges Maß der Totalundeutlichkeit die Doppelsumme

$U_E = \frac{\lambda \kappa}{2(\lambda + 2)(\kappa + 2)(\lambda + \kappa + 2)} a_{\lambda} a_{\kappa} r^{2\lambda + 2\kappa + 4}$ . Eine Änderung der Bestimmungsstücke  $p$  führt zu  $\delta U_E = A_{\nu} \delta p_{\nu}$  (dreifache Summe), wo die Koeffizienten

$$A_{\nu} = \frac{\lambda \kappa}{(\lambda + 2)(\kappa + 2)(\lambda + \kappa + 2)} r^{2\lambda + 2\kappa + 4} a_{\lambda} \alpha_{\kappa\nu}$$

sind. Die Bedingung dafür, daß die Totalundeutlichkeit ein Minimum ist, lautet nun  $\delta U_E = A_{\nu} \delta p_{\nu} = 0$ . — Meist sind noch weitere Forderungen zu erfüllen, behandelt wird der Fall, daß die Isoplanasiebedingung für eine bestimmte Höhe  $h = h_0$  befriedigt wird. Für den Ausgangszustand sei die Abweichung von dieser Bedingung gegeben durch  $v = b_{\kappa} h^{2\kappa}$ ; die  $b_{\kappa}$  und ihre Differentialquotienten  $\beta_{\kappa\nu}$  sind ebenso zu bestimmen wie die  $a_{\kappa}$  und  $\alpha_{\kappa\nu}$ . Alsdann führt die Forderung auf die Gleichung  $B_{\nu} \delta p_{\nu} = B$ , wo  $B_{\nu} = h_0^{2\nu} \beta_{\kappa\nu}$ ,  $B = -b_{\kappa} h_0^{2\kappa}$ . — Durchgeführt wird der Fall, daß man die Bedingungen durch Änderung von zwei passend ausgewählten Bestimmungsstücken  $p_1$  und  $p_2$  erfüllen will und sich auf je drei Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$ ;  $b_1, b_2, b_3$  beschränkt. Man hat hier die Gleichungen  $A_1 \delta p_1 + A_2 \delta p_2 = 0$ ,  $B_1 \delta p_1 + B_2 \delta p_2 = B$ , und zwar ist  $B = -b_1 h_0^2 - b_2 h_0^4 - b_3 h_0^6$ ,  $B_1 = \beta_{11} h_0^2 + \beta_{21} h_0^4 + \beta_{31} h_0^6$ ,  $B_2 = \beta_{12} h_0^2 + \beta_{22} h_0^4 + \beta_{32} h_0^6$ ,  $A_i = \frac{1}{3} r^8 (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \alpha_{1i} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} \alpha_{2i} r^2 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} \alpha_{3i} r^4) a_1 + \frac{2}{4} r^{10} (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \alpha_{1i} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{6} \alpha_{2i} r^2 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7} \alpha_{3i} r^4) a_2 + \frac{3}{5} r^{12} (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \alpha_{1i} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{7} \alpha_{2i} r^2 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{8} \alpha_{3i} r^4) a_3$ . ( $i = 1, 2$ )

Zum Schlusse wird noch darauf aufmerksam gemacht, daß der zu erreichende Minimalwert von der Wahl der Höhe  $h_0$  abhängt, und eine dreifache Summenhaltende Formel für den besten Wert von  $h_0$  abgeleitet. *Hans Boegehold.*

**Lettowsky, Felix:** Bemerkung zur Arbeit O. Schrievers: „Angleichung der elektromagnetischen Reflexions- und Brechungstheorie an die physikalischen Vorgänge“. (*Techn. Hochsch., Brünn.*) Ann. Physik, V. F. 42, 63—64 (1942).

Hinweis, daß entgegen einer Behauptung Schrievers das komplexe Brechungsgesetz anschaulich leicht verständlich und experimentell bestätigt ist. (Schrievers, vgl. dies. Zbl. 26, 33.) *Fues.*

**Kingma Boltjes, T. Y., and C. J. Gorter:** On the influence of the condensor on the resolving power of a microscope. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 814—819 (1942).

Die Verf. erwähnen zunächst die Abbesche Formel für das Auflösungsvermögen eines Mikroskops

$$\left( \Delta = \frac{\lambda}{A} = \frac{\text{Wellenlänge}}{\text{Numerische Apertur des Objektivs}} \right)$$

und weisen darauf hin, daß — wie bereits von Abbe gezeigt — dieses Auflösungsvermögen damit in Zusammenhang gebracht werden kann, daß von dem am Objekt abgebeugten Licht mindestens das Bündel nullter und erster Ordnung in das Objektiv gelangen muß, damit eine Abbildung des Objekts möglich ist. Bei schiefer Beleuchtung und gleicher Objektivapertur läßt sich theoretisch das Auflösungsvermögen um den



Faktor 2 verbessern  $\left(=\frac{\lambda}{2A}\right)$ , da in diesem Fall nur das Strahlenbündel nullter Ordnung und eines der beiden Strahlenbündel erster Ordnung in das Objektiv einzutreten braucht. Praktisch ist indessen der Vorteil der schiefen Beleuchtung nicht so groß. Nach van Cittert ist diese Abweichung des praktisch erreichbaren vom theoretisch erwarteten Auflösungsvermögen durch die „Sichtbarkeit“ bedingt, wobei die Sichtbarkeit wie üblich definiert ist durch  $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ . Die Verff. behandeln nun in vorliegender Arbeit die Sichtbarkeit. Sie geht aus von einem Gitter, dessen Lichtdurchlässigkeit und Phasenbeeinflussung durch eine Fourier-Reihe  $T = \sum_n D_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{d} - \varphi_n\right)$

gegeben ist, wo  $d$  die Gitterkonstante bedeutet. Im Falle gerader Beleuchtung, in dem also das Strahlenbündel nullter und die beiden Strahlenbündel erster Ordnung in das Objektiv gelangen, ergibt sich  $V_1 = \frac{2D_0D_1}{D_0^2 + D_1^2}$ , während im Falle schiefer Beleuchtung (s. o.) sich  $V_2 = \frac{4D_0D_1}{4D_0^2 + D_1^2}$  ergibt. Ist  $D_1^2 \ll D_0^2$ , so wird  $V_1 \approx \frac{2D_0D_1}{D_0^2} = 2\frac{D_1}{D_0}$  und  $V_2 \approx \frac{D_1}{D_0} = \frac{1}{2} V_1$ . Wird ein Kondensor großer Öffnung benutzt, so wird bei schiefer

Beleuchtung nur von einem Bruchteil  $\alpha$  der Strahlenbündel sowohl das Bündel nullter als auch ein Bündel erster Ordnung in das Objektiv eintreten, während von dem Rest  $(1 - \alpha)$  nur das Bündel nullter Ordnung zur Bilderzeugung beitragen wird. In diesem Fall ergibt sich  $V = \frac{4\alpha D_0D_1}{4D_0^2 + \alpha D_1^2} \approx \alpha \frac{D_1}{D_0} = \frac{\alpha}{2} V_1$ . Das Auftreten des Faktors  $\alpha$ , der von der Anordnung und der Öffnung des Kondensors und des Objektivs sowie von der Periode  $d$  des Gitters abhängt, bedingt, daß das Auflösungsvermögen bei schiefer Beleuchtung z. T. wesentlich geringer ist, als man es theoretisch erwartet. Das Ergebnis wird noch näher diskutiert, wobei auch der Fall betrachtet wird, daß der Kondensor durch ein Zentralscheibchen z. T. abgeblendet ist. Durch Beobachtungen an einem Grayson-Gitter und einiger Diatomeen werden die theoretischen Resultate bestätigt.  
*Picht* (Neubabelsberg).

**Scheffers, H.: Vereinfachte Ableitung der Formeln für die Fraunhoferschen Beugungserscheinungen.** Ann. Physik, V. F. 42, 211—215 (1942).

Verf. stellt der bekannten Kirchhoffschen Ableitung der Fraunhoferschen Beugungsformeln aus dem Greenschen Satz und der Integralformulierung des Huyghensschen Prinzips eine andere Ableitung an die Seite, die nur vom Fourierschen Integraltheorem Gebrauch macht. Er geht aus von dem bekannten Ansatz

$$u = e^{ik(x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}$$

und macht mit Kirchhoff die Annahme, daß  $u$  in der Öffnung genau den Wert hat wie bei einer ungestörten Ausbreitung der Welle, während auf dem die Öffnung begrenzenden Schirm  $u$  den Wert 0 annimmt. Dieser so erhaltene auf der ganzen Trennfläche als unperiodische Funktion anzusehende Ausdruck wird mit Hilfe des Fourierschen Integraltheorems für zwei Variable in eine Überlagerung periodischer Funktionen zerlegt. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß sich jedes beliebige Wellenfeld durch Überlagerung ebener Wellen verschiedener Richtung, verschiedener Phase und verschiedener Amplitude darstellen läßt, wird dann für das Wellenfeld hinter der beugenden Öffnung ein entsprechender Ansatz gemacht und die in diesem Ansatz auftretende komplexe Funktion, die die für die verschiedenen Richtungen willkürlichen Amplituden und Phasen angibt, so bestimmt, daß sie die in der beugenden Ebene geltende Randbedingung erfüllt. Verf. erhält so in einfacher Weise den bekannten Ausdruck für die Amplitude der an der kreisförmigen Öffnung gebeugten Lichter. (Ref. bemerkt noch, daß es auf Grund der vom Verf. angegebenen Ableitung auch möglich ist, unter Benutzung der vom Ref. angegebenen Formeln [Ann. Physik, IV. s. 77, 785 (1925),

§ 6] die Gestalt der Wellenflächen hinter der beugenden Öffnung und ihren charakteristischen Zusammenhang mit den Beugungsmaxima und -minima zu berechnen.)

Picht (Babelsberg).

**Bleuler, Konrad, et Jean Weigle: Théorie de l'influence des vibrations thermiques sur la réflexion des rayons X par les cristaux.** (*Laborat. de Physique, Univ., Genève*). Helv. phys. Acta **15**, 553—570 (1942).

Im Anschluß an eigene frühere Untersuchungen, in denen sich die Verff. bereits mit der Wirkung thermischer Gitterschwingungen auf die Röntgeninterferenzen beschäftigt hatten, behandeln sie in vorliegender Arbeit die Frage von neuem. Sie geben zunächst einen Überblick über die bisher vorliegenden Bearbeitungen der zu behandelnden Problemstellung. Insbesondere weisen sie auf Arbeiten von Waller, von Faxen und von v. Laue hin. Die Ergebnisse, zu denen die Verff. kommen, entsprechen den Ergebnissen von Waller, sind aber — wie die Verff. angeben — einfacher. Die Untersuchung legt das reziproke Gitter zugrunde, von den Verff. auch als Fourier-Gitter bezeichnet. Sie drücken zunächst die Elektronendichte des Kristalls als ein Fourier-Integral aus, wobei sie annehmen, daß der Kristall durch mehrere Wellen gestört ist. Sie gehen dann näher auf die thermischen Wellen ein, die durch die Struktur des Kristalls in diesem ermöglicht werden. Anschließend wird der Einfluß der Temperatur auf die Lage eines Laue-Punktes sowie der kontinuierliche Untergrund formelmäßig ermittelt und näher diskutiert. Bei den theoretischen Untersuchungen nehmen die Verff. zunächst an, daß mit jedem Wellenvektor nur eine einzige Welle verbunden ist, und daß außerdem die Energie dieser Wellen nach dem Gesetz der Gleichverteilung verteilt ist. In einem abschließenden Kapitel gehen sie von diesen einschränkenden Voraussetzungen ab.

Picht (Neubabelsberg).

**Born, M., and Kathleen Sarginson: The effect of thermal vibrations on the scattering of X-rays.** Proc. roy. Soc., Lond. A **179**, 69—93 (1941).<sup>4</sup>

Die Arbeit beschäftigt sich mit den in der Umgebung von (selbst nicht vorhandenen) Laue-Interferenzen auftretenden temperaturabhängigen Intensitätsmaxima des diffusen Streuhintergrunds auf Laue-Aufnahmen. Sie treten bisweilen als sehr ausgesprochene Flecken auf, wenn monochromatische Primärstrahlung etwas abweichend vom Glanzwinkel auf den Kristall einfällt. — Nach einem kritischen Überblick über die seitherige Literatur zu diesem Gegenstand, in welchem sie die Erklärungsversuche von Raman und Mitarbeitern einerseits, von Preston und Bragg andererseits verwerfen, schließen sich die Verff. der Gruppe von Arbeiten an, welche als Erweiterung der Debyeschen Theorie des Temperaturfaktors auf inkohärente Streuprozesse gekennzeichnet werden kann. — Sie betrachten vorbereitend die Gesamtstreuung an einer thermischen Schwingungen unterworfenen Atomgruppe, um dann das entsprechende Problem für ein „warmes“, in elastischen Schwingungen begriffenes Kristallgitter mit Basis durchzurechnen. Entscheidend ist für das Ergebnis, daß einerseits die Quantenzustände jedes Gitteroszillators in ihrer Boltzmann-Verteilung zugrunde gelegt und andererseits die aus ihnen möglichen Anregungswahrscheinlichkeiten quantenmechanisch abgeschätzt werden. Das früher schon von Ott hergeleitete Zwischenergebnis ist, daß die Oszillatoren mit niedrigsten Energiequanten bei weitem die größte Anregungswahrscheinlichkeit darbieten. Für die drei kubischen Bravaisgitter wird nun das elastische Frequenzspektrum in Funktion des Ausbreitungsvektors  $\mathfrak{R}$  der elastischen Welle unter der Voraussetzung betrachtet, daß nur Erstnachbarn Kräfte aufeinander ausüben. Es ergeben sich so die Anregungswahrscheinlichkeiten für die Oszillatoren dieser Gitter. Von ihnen kann aber nur insoweit bei der inkohärenten Streuung der Röntgenstrahlung Gebrauch gemacht werden, als dies nicht gegen eine auf diesen Fall erweiterte Laue-Bedingung  $\mathfrak{f} - \mathfrak{f}_0 = \mathfrak{h} + \mathfrak{R}$  verstößt, die in der Bornschen Rechnung implizite in Formel (2 · 38) auftritt. Sieht man die Einfallsrichtung  $\mathfrak{f}_0$  als gegeben an und betrachtet man die Umgebung einer ganz bestimmten Laue-Interferenz  $\mathfrak{h}$ , so hängt von  $\mathfrak{f}$  der Ausbreitungsvektor  $\mathfrak{R}$  des angeregten Oszillators ab, und es wird



in derjenigen Richtung  $\mathbf{k}$  maximale Intensität gestreut, für deren zugeordnete Oszillatoren größte Wahrscheinlichkeit inkohärenter Streu- bzw. Anregungsprozesse besteht. Die Intensitätsverteilung in der Umgebung dieser günstigsten Streurichtungen wird elementargeometrisch hergeleitet. Dabei ergibt sich für KCl das Braggssche Resultat auf anderer Grundlage.

Fues (Breslau).

**Zachariasen, W. H.:** On the theory of temperature diffuse scattering. Phys. Rev., II. s. 60, 691 (1941).

Zu der vorstehend referierten Arbeit von Born und Sarginson bemerkt Verf., daß — abgesehen von einer formalen Verallgemeinerung auf Gitter mit Basis — jene Arbeit zu Ergebnissen führt, die er selbst früher [vgl. Phys. Rev., II. s. 57, 597 (1940) und dies. Zbl. 25, 284] abgeleitet hat. Von der in beiden Arbeiten benützten Näherungsrechnung hat er gezeigt, daß sie höchstens qualitativ richtige Ergebnisse liefern kann, weshalb die quantitativen Angaben von Born und Sarginson nicht als zuverlässig anzusehen sind.

Fues (Breslau).

## **Relativitätstheorie:**

● **Heckmann, Otto:** Theorien der Kosmologie. (Fortschr. d. Astronomie. Hrsg. v. d. Astron. Ges. durch P. ten Bruggencate. Bd. 2.) Berlin: Springer 1942. VII, 110 S. u. 7 Abb. RM. 9.60.

Die gemeinsame Grundlage der Theorien der Kosmologie bildet das Homogenitätspostulat, das dem Leser in dreifacher Ausführung entgegentritt. Es besagt, daß die mittlere Strömung der Materie im Weltall für einen in ihr ruhenden Beobachter überall den gleichen Anblick bietet, daß also die Flucht der fernen Nebel keine Auszeichnung des Milchstraßensystems bedeutet. — Im ersten Teil, der dynamischen Kosmologie, wird es auf die Newtonsche Mechanik angewandt. Dabei stellt sich zunächst das bekannte Ergebnis ein, daß es bei strenger Gültigkeit des Newtonschen Gravitationsgesetzes keine statische Materieverteilung konstanter Dichte gibt. Darüber hinaus zeigt sich aber, daß sehr wohl homogene Strömungen konstanter Dichte möglich sind. Dazu gehört insbesondere die isotrope Dilatation und Kontraktion des Weltalls. Das Strömungsgesetz ist durch die Gesamtmasse und die Energie des Weltsubstrats bestimmt. Sämtliche Lösungen sind durch eine Singularität am Anfang der Zeit gekennzeichnet, die eine Konzentration der gesamten Masse in einem Punkt bedeutet und die sich in speziellen Fällen periodisch wiederholt. (Die Singularität läßt sich nur durch Abänderung des Gravitationsgesetzes beseitigen.) Ferner kann man auf Grund der Untersuchung der Bewegung freier Teilchen zeigen, daß die Bewegung des Weltsubstrats im Sinne der Statistik und Thermodynamik adiabatisch und reversibel erfolgt (nicht aber quasistatisch). Zum Schluß werden optische Fragen behandelt. Insbesondere wird auf eine prinzipielle Schwierigkeit hingewiesen, die eine nichtrelativistische Optik in zeitlich veränderlichen Gravitationsfeldern bietet. Bemerkenswert ist noch folgendes Ergebnis. Während das Newtonsche Gravitationsgesetz allein bei konstanter Dichte im ganzen Raum zu keinem bestimmten Wert für das Potential führt, wird durch das Homogenitätspostulat die Art des Grenzübergangs der Integration über den unendlichen Raum so bestimmt, daß sich nunmehr ein eindeutiger Wert des Integrals einstellt. — Auch im zweiten Teil, der metrischen Kosmologie, wird das Homogenitätspostulat den physikalischen Grundgesetzen überlagert, um so zu einem einfachen Modell der Wirklichkeit zu kommen, von dem noch aussteht, wie weit es diese wirklich beschreibt. Jetzt werden die Grundgesetze der allgemeinen Relativitätstheorie unter dem Einfluß des Postulats betrachtet. In einem Koordinatensystem, in dem das Weltsubstrat ruht, hat das Linienelement die Form  $ds^2 = dt^2 + R^2 d\sigma^2$ . Darin bedeutet  $d\sigma$  das dreidimensionale, zeitlich konstante Linienelement eines nichteuklidischen Raumes konstanter Krümmung, und  $R(t)$  ist ein Skalenfaktor, der genau denselben Gesetzen wie in der Newtonschen Gravitationstheorie genügt. Auf Grund des Äquivalenzsatzes der allgemeinen Relativitätstheorie ist es nunmehr möglich, die

optischen Phänomene in Strenge zu behandeln. Es ergibt sich ein eindeutiger Zusammenhang zwischen scheinbaren Helligkeiten, absoluten Helligkeiten, Entfernung und Rotverschiebung. Der Vergleich mit der Beobachtung zeigt, daß sich die Erfahrung den Folgerungen aus dem Homogenitätspostulat unterordnet. Die Genauigkeit der Beobachtung ist aber nicht ausreichend, wie eine kritische Diskussion der Auswertungsmethoden zeigt, um mit einiger Sicherheit auf den Krümmungsradius zu schließen. Euklidisches Linienelement für  $d\sigma$  ist noch mit der Erfahrung verträglich. Angesichts der so unvollkommenen Erfahrung betont der Verf., daß durch diese noch vage Übereinstimmung die Richtigkeit des Homogenitätspostulats keineswegs als endgültig gesichert angesehen werden kann. — Im dritten Teil, der kinematischen Kosmologie, wird der Standpunkt der Milneschen Theorie entwickelt. Für ihn bedeutet das Homogenitätspostulat mehr als nur eine versuchsweise Beschränkung der durch die Grundgleichungen gegebenen Lösungsmannigfaltigkeiten. Es spielt eine ähnliche Rolle wie die Forderung der Lorentzinvarianz und soll, wenn nicht die Grundgleichungen überhaupt, wesentliche Eigenschaften derselben liefern. Als bemerkenswertes Ergebnis erhält man zunächst, daß unter den homogenen Strömungen nur eine bestimmte Art der isotropen Strömung zugleich Lorentzinvariant ist. In der weiteren Entwicklung der Milneschen Theorie spielt noch ein weiteres Postulat eine Rolle, die Dimensionsforderung, nach der in den Grundgesetzen keine Dimensionskonstanten vorkommen dürfen. Verf. zeigt, daß sich die Milnesche Theorie erst in diesem Punkt wesentlich von den früheren Theorien unterscheidet und daß die Dimensionshypothese zu ernstlichen Schwierigkeiten führen kann.

*Fritz Bopp* (Breslau).

**Dive, Pierre:** Propagation ellipsoïdale des ondes électromagnétiques. C. R. Acad. Sci., Paris **214**, 612—615 (1942).

Versuch der Durchführung eines von Poincaré zur Erklärung der elektrodynamischen Erscheinungen in bewegten Körpern geäußerten Gedankens (Der Wert der Wissenschaft; Leipzig 1906, S. 153). Darnach soll sich infolge der Bewegung des materiellen Mittels der Äther so verändern, daß in ihm die Ausbreitung elektromagnetischer Störungen nicht mehr in kugelförmigen Wellenflächen, sondern in Wellenflächen von der Gestalt von Rotationsellipsoiden erfolgen soll. Es wird die Existenz eines ausgezeichneten Bezugssystems  $R$  mit universeller Zeitmessung angenommen und in jedem dagegen bewegten Galileischen System  $R'$  eine „Ortszeit“ eingeführt, welche die kugelförmige Ausbreitung der Wellen um jede in  $R'$  ruhende Quelle sicherstellt. Die elektromagnetischen Gesetze werden in invarianter Gestalt angeschrieben. (Die Transformationsgleichungen zwischen den Systemen  $R'$  besitzen jedoch nicht die Gruppeneigenschaft. Weiter muß die vom Verf. unbestimmt gelassene Funktion  $a(v)$  den Wert 1 haben. Dann kommen die Transformationsgleichungen zwischen den Raumzeit-Koordinaten auf das von Lorentz zur Erklärung des Fehlens der Effekte 1. Ordnung eingeführte System  $x' = x$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z - vt$  und  $t' = t - v/c^2 x$  hinaus. Anm. d. Ref.)

*W. Glaser* (Prag).

**Reichenbächer, Ernst:** Die Erzeugung des Schwerfeldes. Z. Physik **119**, 630—658 (1942).

Im Anschluß an die in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **17**, 430) niedergelegten Gedankengänge wird gezeigt, wie die Materie das Schwerfeld hervorbringt. Die Materiedichte wird dabei nicht als Tensor eingeführt, sondern dem Skalar der Weltkrümmung gleichgesetzt. Der Ansatz der Punktbewegung (auf geodätischen Linien) werden der Forderung der Eichinvarianz angepaßt, infolgedessen die Definition der Schwerfeldstärke und der felderzeugenden Masse abgeändert. Als erste Annäherung wird das Newtonsche Gesetz, als zweite die Einsteinsche Effekte abgeleitet, die aber von den Einsteinschen Werten abweichen. Die Abänderungen, die das Schwerfeld in unmittelbarer Nähe der anziehenden Massenteilchen durch die neue Theorie erfährt, werden berechnet.

*J. Haantjes* (Amsterdam).



**Järnefelt, G.:** Das Einkörperproblem in dem sich ausdehnenden Raume der Einstein-De Sitterschen Welt. Ann. Acad. Sci. Fennicae A I, Nr 12, 1—38 (1942).

In Fortführung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 24, 378) gibt die vorliegende durch Reihenentwicklungen eine genäherte Auflösung der Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation ohne kosmologisches Zusatzglied für die allgemeinste kugelsymmetrische und zeitabhängige Metrik. Als Folge ergibt sich, daß Planetenbahnen um das Symmetriezentrum in der benutzten Näherung die Expansion des Raumanteils nicht mitmachen, ein Resultat, das in der älteren Arbeit streng für eine spezielle Metrik gegeben war.

*Heckmann* (Hamburg-Bergedorf).

**Donder, Th. de:** La mécanique statistique relativiste. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 28, 240—246 (1942).

Es wird gezeigt, daß man die Transportgleichung in invarianter Weise allgemein relativistisch formulieren kann.

*Fritz Bopp* (Breslau).

## Atomphysik.

### Statistik und kinetische Theorie der Materie:

**Westphal, Wilhelm H.:** Zur Definition des Molekulargewichtes, des Mol und der Loschmidtschen Zahl. Physik. Z. 43, 329—331 (1942).

**Christiansen, J. A.:** On the velocity of unimolecular reactions. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 20, Nr 4, 1—18 (1942).

**Rosenfeld, L.:** Sur le comportement d'un ensemble canonique lors d'une transformation adiabatique. Akad. Wetenschap. Amsterdam, Proc. 45, 970—972 (1942).

Die neuere Ergodentheorie gestattet es, die Gibbssche statistische Mechanik in einer Weise darzustellen, welche der Ehrenfestschen Kritik nicht mehr unterliegt. Eine Lücke bestand aber in dieser Hinsicht bisher noch im genauen Verständnis der quasistatistischen, nichtisothermen Zustandsänderungen. Um diese Lücke zu schließen, wird die Phasenverteilung berechnet, welche aus einer kanonischen Gesamtheit bei plötzlicher Änderung eines äußeren Parameters des wärmeisolierten Systems entsteht. Es zeigt sich, daß die neue Verteilung wieder eine kanonische Gesamtheit bildet, bis auf Glieder, welche bei genügend großer Anzahl von Freiheitsgraden des Systems zu vernachlässigen sind. Die Temperatur der neuen kanonischen Gesamtheit ist dieselbe, wie man sie nach der Thermodynamik bei adiabatischer Zustandsänderung zu erwarten hat.

*Waldmann* (Berlin.)

**Jones, R. Clark:** On the theory of the thermal diffusion coefficient for isotopes. Phys. Rev., II. s. 59, 1019—1033 (1941).

Die vorliegende Arbeit stellt die Fortsetzung einer gleichnamigen früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 26, 178) dar und befaßt sich mit der Berechnung der Temperaturabhängigkeit der Thermodiffusionskonstanten  $\alpha$  einer Mischung von Isotopen, indem die allgemeine Enskogische Formel für  $\alpha$  für das 9; 5-Lennard-Jones-Modell der intermolekularen Kräfte ausgewertet wird. Das 9; 5-Modell wurde gewählt, weil auf diese Weise die umfangreichen, numerischen Rechnungen von Hassé und Cook, welche mit dieser Annahme den Zähigkeitskoeffizienten bestimmt hatten, benutzt werden konnten. Während die Berechnung von  $\alpha$  in der ersten Arbeit nur für schwache Wechselwirkungskräfte durchgeführt wurde, ist die vorliegende Behandlung von dieser Beschränkung frei. Die Resultate zeigen, daß die Thermodiffusionskonstante mit abnehmender Temperatur zuerst schwach ansteigt, dann rasch abnimmt, durch Null geht und merkwürdigerweise bei Temperaturen von 1,5mal der kritischen Temperatur sogar negativ wird. Die Konstante wird stark negativ, wenn die Temperatur weiter abnimmt, und sie nähert sich mit der Annäherung an den absoluten Nullpunkt der Null. Mit den experimentellen Befunden kann nach einigen plausiblen Korrekturen quantitative Übereinstimmung erzielt werden. Ein unmittelbarer Widerspruch ergibt sich jedoch mit den Versuchsergebnissen von W. Groth und P. Harteck bei der Isotopentrennung

von Quecksilber, welche unterhalb der kritischen Temperatur zu einem negativen Thermoeffusionskoeffizienten, also einer Anreicherung des leichteren Isotops am unteren Ende des Trennrohres, hätten führen müssen. *W. Glaser (Prag).*

**Clusius, Klaus, und Ludwig Waldmann: Ein übersehener gaskinetischer Effekt.** Naturwiss. 30, 711 (1942).

Bei der Mischung zweier idealer, chemisch indifferenten Gase tritt keine Wärmetönung auf, so daß die innere Energie als ganze unverändert bleibt. Wie die Verff. feststellen, tritt jedoch während des Diffusionsvorganges bei der einen Komponente eine Abkühlung, bei der anderen eine Erwärmung auf, die sich für den Gesamteffekt gerade kompensieren. Dieser neue Effekt stellt im gewissen Sinne die Umkehrung der Erscheinung der Thermoeffusion dar. Bei der Thermoeffusion erzeugt das Temperaturgefälle in einer zunächst homogenen Gasmischung ein Gefälle der relativen Konzentrationen. Bei der obigen Erscheinung ruft dagegen das Konzentrationsgefälle der diffundierenden Gase in dem zunächst isothermen System einen Temperaturgradienten hervor. Die Theorie dieser Erscheinung ist in den beiden Gleichungen

$$\partial\gamma/\partial t = \partial/\partial x D[\partial\gamma/\partial x + \alpha\gamma(1-\gamma) \partial \ln T/\partial x]$$

und

$$C_v/v \partial T/\partial t = \partial/\partial x (\lambda \partial T/\partial x + p D \alpha \partial\gamma/\partial x)$$

aus der Dissertation von Enskog enthalten. Hierbei bedeuten  $\gamma$  den Molenbruch eines Gases,  $T$  die absolute Temperatur,  $p$  den Druck,  $D$  die Diffusionskonstante,  $C_v$  die Molwärme bei konstantem Volumen,  $v$  das Molvolumen,  $t$  die Zeit,  $x$  die Längenkoordinate und  $\alpha$  den Thermoeffusionsfaktor. Das letzte Glied der zweiten Gleichung ist für die Erscheinung maßgebend. Verff. geben eine größenordnungsmäßige Abschätzung dieser Erscheinung und weisen auf seine mögliche Bedeutung für die Bestimmung von  $\alpha$  bei verschiedenen Temperaturen hin. Eine ausführliche Veröffentlichung wird in Aussicht gestellt. *W. Glaser (Prag).*

**Fleischmann, R., und H. Jensen: Das Trennrohr (nach Clusius und Dickel).** Ergebn. exakt. Naturwiss. 20, 121—182 (1942).

Die Theorie des Zusammenwirkens von Thermoeffusion und hydrodynamischer Konvektionsströmung in dieser für die Isotopentrennung und damit für die Kernphysik sehr wichtigen Methode wird ausführlich dargestellt. *K. Wirtz (Berlin).*

**Groot, S. R. de, W. Hoogenstraaten und C. J. Gorter: Un effet oublié dans la théorie de la méthode thermo-gravitationnelle de séparation.** Physica, Haag 9, 923—924 (1942).

Es wird darauf hingewiesen, daß in der Theorie des Trennverfahrens von Clusius (vgl. dies. Zbl. 22, 34) darauf zu achten ist, daß die Dichteänderung des Mediums im Temperaturgradienten nicht nur durch den Ausdehnungskoeffizienten hervorgerufen wird, sondern auch durch die sich überlagernde Substanztrennung infolge des Soret-effekts. Beide Effekte können verschiedenes Vorzeichen haben. *Wirtz (Berlin).*

**Rushbrooke, G. S.: A theoretical atomic distribution curve for liquid argon at 90° K.** Proc. roy. Soc. Edinburgh 60, 182—191 (1940).

Die erste Erhebung der Atomverteilungskurve von flüssigem Argon bei 90° absolut wird theoretisch bestimmt, indem die früher von Coulson und dem Verf. angegebene statistische Formel für die Berechnung der Atomverteilung aus dem mittleren Atomfeld  $\bar{\Phi}(s)$  ( $s \equiv$  Verschiebung des Atoms aus seiner mittleren Lage) ausgewertet wird. Das „mittlere“ Potential  $\bar{\Phi}(s)$  wird aus dem Lennard-Jonesschen Wechselwirkungspotential  $\varphi(r) = \lambda/r^n - \mu/r^m$  durch Mittelung über die nächsten Nachbarn der Entfernung  $R_1$  gewonnen. Im Hinblick auf eine Arbeit von Corner wurde im Lennard-Jonesschen Wechselwirkungspotential statt  $n = 12$  der Wert  $n = 11,4$  gewählt ( $m = 6$ ). Die gefundene Atomverteilungskurve wurde mit derjenigen von Wall, die  $\bar{\Phi}(s)$  durch einen „Potentialtopf“ schematisiert, verglichen und eine sehr enge Übereinstimmung festgestellt. Schließlich wurde auch der folgende Ver-



lauf der Verteilungskurve, welche weitere Gipfel aufweist, auf Grund der beiden alternativen Annahmen, daß die Koordination der Atome einem flächenzentrierten Gitter bzw. der Bernalschen geometrischen Theorie entspricht, bestimmt. *W. Glaser* (Prag).

**Riehl, N., und K. G. Zimmer:** Zur Energieausbreitung in festen Körpern und Molekülkomplexen. *Naturwiss.* **30**, 708—709 (1942).

Neben „elektronischer“ (Riehl) und „Resonanz“übertragung (Scheibe) der einem Gitter oder Molekülkomplex an einer Stelle zugeführten Aktivierungsenergie über viele Atome hinweg ist von Dehlinger ein Weiterreichen derselben von Atom zu Atom beim „Umklappmechanismus“ und von Hedvall bei der Wanderung von Störstellen angenommen worden. Die Verff. betonen die Wichtigkeit der Klärung solcher Prozesse auch für biologische Reaktionen; sie suchen in erster Linie nach Gründen, warum wanderungsfähige Störstellen die Neigung zeigen, sich im statistischen Sinne gleichmäßig über ein Gitter auszubreiten und dabei immer neu der Oberfläche zuzuwandern, wenn sie dort durch eingetretene Reaktionen verbraucht sind. Einen Hinweis auf die Existenz solcher Gründe erblicken sie in den Sättigungserscheinungen der Gitter gegen Fremdatome, die man formal als gegenseitige Abstoßung der Störstellen beschreiben und atomistisch aus den Kraftwirkungen der Gitterverzerrungen erklären kann. *Fues* (Breslau).

### Kristallbau und fester Körper:

**Hsü, Hsien-yü, and William Band:** Theory of liquid He II. *Phys. Rev.*, II. s. **59**, 1013—1018 (1941).

**Fürth, R.:** On the stability of crystal lattices. 6. The properties of matter under high pressure and the lattice theory of crystals. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **37**, 177—185 (1941).

Neue Experimente von Bridgman [*Proc. Amer. Acad. Arts Sci.* **74**, 21, (1940)] über die Kompressibilität fester Körper unter hohem Druck werden mit Ergebnissen der Bornschen Theorie der Zustandsgleichung und anderer thermodynamischer Eigenschaften von Kristallen [*J. Chem. Phys.* **7**, 591 (1939)] verglichen; der Vergleich fällt zugunsten der Theorie aus. Betrachtungen über den Stabilitätsbereich eines Gitters unter hohem negativen Druck schließen sich an, welche die Idee eines engen Zusammenhangs zwischen der Stabilitätstheorie von Gittern und der Theorie des Schmelzens unterstützen. (Vgl. dies. Zbl. **27**, 182.) *J. Meixner* (Aachen).

### Elektronentheorie:

**Hillier, James:** A discussion of the fundamental limit of performance of an electron microscope. *Phys. Rev.*, II. s. **60**, 743—745 (1941).

Verf. diskutiert die Frage des Auflösungsvermögens eines Elektronenmikroskops. Er erwähnt zuerst, daß das Auflösungsvermögen durch die Beugung bestimmt wird, daß die hiermit erhaltene Formel, die von einem punktförmigen Objekt ausgeht, aber nicht ohne weiteres anwendbar sei, da sich z. B. das Bild eines einzelnen Atoms auf ein Vielfaches seines rein geometrischen Bildes erstreckt und sich dementsprechend die Beugungsbilder der einzelnen Punkte des Objektes derart überlagern, daß eine besondere Untersuchung der hier vorliegenden Verhältnisse erforderlich sei. Er betrachtet folgende Fragestellung: In der Objektebene befinde sich ein einzelnes Atom; die Objektebene selbst werde durch ein homogenes Bündel von Elektronenstrahlen der Intensität  $I_0$  beleuchtet, so daß  $I_0 r_0 dr_0 d\theta_0$  die Zahl der Elektronen ist, die pro Sekunde durch ein Flächenelement der Objektebene hindurchgehen, sofern sich in dieser Objektebene kein abzubildendes, undurchsichtiges Objekt befindet. Betrachtet man ein einzelnes Flächenelement, so erstreckt sich das Bild dieses Flächenelementes in der Bildebene über das geometrische Bild hinaus, derart, daß man für einen Punkt der Bildebene, dessen Abstand vom geometrischen Bildort des betreffenden Flächenelementes durch  $r_i$  bezeichnet werde, die Elektronenintensität durch  $F(r_i) I_0 r_0 dr_0 d\theta_0$  ansetzen kann.

Nimmt man nun an, daß sich in der Objektebene ein undurchsichtiges, kreisförmiges Objekt vom Radius  $r_a$  befindet, so erhält man die Elektronenintensität  $I_i$  in einem Punkt der Bildebene, indem man den vorstehenden Ausdruck über  $\theta_0$  in den Grenzen 0 bis  $2\pi$  und über  $r_0$  in den Grenzen  $r_a$  bis  $\infty$  integriert. Zur Vereinfachung der Rechnung setzt Verf. für  $F(r)$  den Exponentialausdruck  $a \exp(-kr^2)$ , wo über  $a$  und  $k$  noch gewisse Annahmen möglich sind. Unter der weiteren Annahme, daß die Intensitätsdifferenz, die mit Hilfe einer photographischen Emulsion wahrnehmbar ist, mindestens 10% betragen muß, berechnet Verf., daß eine Wahrnehmbarkeit von einzelnen Atomen mittels eines elektronenoptischen Bildes nur möglich ist, wenn die Atomnummer  $Z$  des betrachteten Atoms ungefähr  $\geq 25$  ist, wobei noch vorausgesetzt wurde, daß das Elektronenmikroskop mit Elektronen von 60 kV arbeitet. Verf. geht dann noch ganz kurz darauf ein, daß der Bildkontrast eines gegebenen Atoms praktisch noch stark verringert wird durch die Anwesenheit benachbarter Atome, durch die Benutzung nichtparalleler Beleuchtung, durch die Gegenwart eines Trägerfilms sowie durch die Linsenaberration.

*Picht* (Babelsberg).

### **Nicht-relativistische Quantentheorie:**

● **Perrin, Jean:** Les atomes. Paris: Presses univ. de France 1940. 300 pag. frs 30.—.

**Kastler, A., et A. Rousset:** L'effet Raman et le pivotement des molécules dans les cristaux. Théorie générale et vérification expérimentale dans le cas du naphthalène. J. Phys. Radium, VIII. s. 2, 49—57 (1941).

**Sandeman, Ian:** The energy levels of a rotating vibrator. Proc. roy. Soc. Edinburgh 60, 210—223 (1940).

Dunhams Berechnung der Energiestufen eines rotierenden Oszillators mit der Wentzel-Brillouin-Kramers-Methode bei Potenzreihenentwicklung des Potentials (dies. Zbl. 5, 274) wird kritisch untersucht und in eine Form gebracht, die zur praktischen Berechnung der Molekeleigenschaften aus Bandenbeobachtungen geeignet ist.

*F. Hund* (Leipzig).

**Polder, D.:** On the dipole moment of ammonia. Physica, Haag 9, 908—914 (1942).

Infolge der beiden sich spiegelbildlich entsprechenden Gleichgewichtslagen des Kerngerüsts hat jeder einzelne Energiezustand der  $\text{NH}_3$ -Molekel kein Dipolmoment. Der Starkeffekt setzt quadratisch ein, wird aber bei stärkeren Feldern linear. Die Rechnungen werden mit Ergebnissen bei der Ablenkung von  $\text{CH}_3$ -Molekelstrahlen in elektrischen Feldern verglichen.

*F. Hund* (Leipzig).

**Péter, Gy.:** Berechnung der Energie des (4 s, 5 s)-Triplet-S-Zustandes des Ca-Atoms. Z. Physik 119, 713—716 (1942).

Berechnung ohne Benutzung empirischer Konstanten nach dem Näherungsverfahren von Gombás (dies. Zbl. 26, 38, 379).

*F. Hund* (Leipzig).

**Coulson, C. A.:** The charge distribution and dipole moment of the C-H bond. Proc. Cambridge Philos. Soc. 36, 509—510 (1940).

Aus einer Rechnung des Verf. über die  $\text{CH}_4$ -Molekel [Trans. Faraday Soc. 33, 388 (1937)] folgt ein Wert des Dipolmomentes der C-H-Bindung ( $0,53 \cdot 10^{-18}$ ). *F. Hund*.

**Seel, F.:** Beiträge zur Quantenmechanik der chemischen Bindung. 2. Bindungssystem und Stereochemie der Kumulene. Z. phys. Chem. Abt. B 53, 103—116 (1943).

**Hettner, G.:** Der Aufbau der Materie. Scientia 72, 72—80 (1942).

Bericht über die Deutung des Aufbaues der zusammenhängenden Materie (Kohäsion, chemische Valenz, Bau der Kristalle und Flüssigkeiten) mit Hilfe der Quantentheorie.

*F. Hund* (Leipzig).

**Polder, D.:** On the theory of the paramagnetic anisotropy of some hydrated cuprie salts. Physica, Haag 9, 709—718 (1942).

Die Anisotropie der Curie-Konstanten für  $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$  und  $\text{K}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$  wird auf tetragonale Gruppen  $\text{Cu}^{++}(\text{H}_2\text{O})_6$  bzw.  $\text{Cu}^{++}(\text{H}_2\text{O})_4$  mit 2 O-Atomen von



SO<sub>4</sub>-Gruppen zurückgeführt. Die Elementarzelle enthält zwei verschieden orientierte solche Gruppen. Den beobachteten Anisotropien beider Salze kann man mit der Annahme gerecht werden, daß das Cu<sup>++</sup>-Ion in jeder Gruppe magnetisch einachsrig ist mit den Curie-Konstanten 0,56 bzw. 0,40 in Richtung der tetragonalen Achse bzw. senkrecht zu ihr. Diese Werte lassen sich mit der Annahme eines tetragonalen Kristallfelds, das auf das Ion wirkt, erklären: als Modell wird ein Cu<sup>++</sup>-Ion gewählt, das von den permanenten und induzierten Dipolen von sechs H<sub>2</sub>O-Molekülen umgeben wird. Die Stark-Effekt-Aufspaltung des <sup>2</sup>D-Zustandes ergibt sich so von der Größenordnung 20000 cm<sup>-1</sup>.

*J. Meixner (Aachen).*

**Ariyama, Kanetaka:** Zur Theorie der Supraleitung. Z. Physik **119**, 174—181 (1942).

Eine qualitative Überlegung versucht zu zeigen, daß ein Verständnis des supraleitenden Zustandes in der Bloch-Hartreeschen Näherung in Hinblick auf den Magneteffekt prinzipiell möglich ist, wenn man die magnetischen Wechselwirkungen der von Welker in seiner Theorie der Supraleitung eingeführten Elektronenbahnmomente berücksichtigt.

*J. Meixner (Aachen).*

**Sommerfeld, A.:** Bemerkungen zur Theorie der Supraleitung. Z. Physik **118**, 467—472 (1941).

Aus seiner Theorie der Supraleitung hat H. Welker eine bestimmte Beziehung zwischen der Sprungtemperatur, der Ordinate  $H_0$  der Schwellwertkurve bei  $T = 0$  und dem Koeffizienten im Elektronenanteil der spezifischen Wärme im normalleitenden Zustand aufgestellt, in der noch ein Zahlenfaktor von der Größenordnung 1 offen blieb. Verf. zeigt nun, daß diese Beziehung einschließlich Zahlenfaktor aus dem von Casimir und Gorter rein thermodynamisch abgeleiteten Zusammenhang zwischen dem Sprung der spezifischen Wärmen an der Schwellwertkurve und deren Krümmung folgt, sofern nur diese Kurve mit horizontaler Tangente bei  $T = 0$  einläuft. Nach Messungen von Misener ist diese thermodynamische Beziehung für Thallium erfüllt.

*Sauter (München).*

**Kohler, Max:** Die elektrischen und thermischen Eigenschaften von Metallen im Magnetfeld. Ann. Physik, V. F. **42**, 142—164 (1942).

In Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. über den gleichen Gegenstand werden aus dem üblichen Formalismus der metallischen Elektrizitäts- und Wärmeleitung in einem Magnetfeld allgemeine Zusammenhänge für die hier vorkommenden Koeffizienten abgeleitet, wie z. B. daß die Tensoren des elektrischen und thermischen Widerstandes positiv definit sind, daß diese Widerstände monotone Funktionen eines longitudinalen Magnetfeldes sind usw. Wegen der näheren Einzelheiten und der verschiedenen Ergebnisse muß auf die Originalarbeit verwiesen werden.

*Sauter.*

**Smoluchowski, R.:** Anisotropy of the electronic work function of metals. Phys. Rev., II. s. **60**, 661—674 (1941).

Erfahrungsgemäß hängt die Stärke der Glühelctronen-Emission bei kristallischen Medien von der Austrittsrichtung ab und weist Schwankungen zwischen  $1/10$  und  $1/2$  Volt auf. Nach einem Vorschlag von J. Bardeen (dies. Zbl. **15**, 188) wird sie auf eine Richtungsabhängigkeit der Austrittsarbeit zurückgeführt, welche durch eine Verschiedenartigkeit der Doppelschicht am Rande des Kristalls bedingt sein soll. (Wie diese Richtungsabhängigkeit mit dem Energiesatz in Einklang zu bringen ist, wird dabei nicht gesagt.) Verf. berechnet nun die Größe dieser Doppelschicht unter der Annahme, daß sie durch zwei verschiedene Effekte entsteht, nämlich 1. durch die Ausbreitungstendenz der Elektronen über den Bereich der positiven Gitterionen hinaus und 2. durch das Bestreben der Elektronen, die durch die Gitterstruktur bedingten Potentialschwankungen am Rande des Kristalls auszuglätten. Durch Abschätzung bzw. eingehende Untersuchung dieser beiden Effekte erhält Verf. für das Moment der Doppelschicht und damit für die Austrittsarbeit Formeln, welche hinsichtlich ihrer Richtungsabhängigkeit mit den Beobachtungen übereinzustimmen scheinen.

*Sauter (München).*

**Torrey, H. C.:** Notes on intensities of radiofrequency spectra. Phys. Rev., II. s. 59, 293—299 (1941).

Beim Vergleich gemessener und gerechneter Breiten von Spektrallinien im Gebiet der Radiofrequenzen muß der Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung in dem benutzten Atom- oder Molekelstrahl berücksichtigt werden. Für Atome mit  $J = 1/2$  werden die Formeln zusammengestellt.

*F. Hund* (Leipzig).

**Hellwege, K.-H.:** Zur Ausmessung atomarer Strahlungsfelder in Kristallen. Z. Physik 119, 325—333 (1942).

Die Symmetrie der Umgebung hat nicht nur Einfluß auf die Quantenzustände eines in ein Kristallgitter eingebauten Atoms oder Ions, sondern auch auf die zwischen ihnen möglichen Quantenübergänge, also auf die Polarisierung der dabei emittierten oder absorbierten Strahlung. Korrespondenzmäßig kann man von einer festen Orientierung der den atomaren Strahlungsquellen entsprechenden elektrischen oder magnetischen Dipole sprechen. — Verf. erörtert, inwieweit Polarisationsversuche, deren Durchstrahlungsrichtungen nach den Hauptachsen der optischen Indikatrix orientiert werden, geeignet sind, die Dipol- (Quadrupol-) Orientierungen aus bloßen Auslöschungen der Absorptionslinien zu bestimmen. Da jedes Symmetrieelement zu einer möglichen Dipolrichtung neue, im allgemeinen schiefe Möglichkeiten erzeugt, deren Strahlungsfelder sich der Wirkung der ersten überlagern, so ist im allgemeinen nur in Kristallen niedriger Symmetrie, in denen alle Dipole derselben Sorte gleich orientiert sein müssen, mit solchen Auslöschungen zu rechnen. Andererseits verhindert nach Ansicht des Verf. die in den niedrigsten Symmetrieklassen meist abweichende Orientierung der Indikatrixachsen gegen die quantenmechanisch wirksamen Vorzugsrichtungen des Gitters wiederum eine einfache qualitative Deutung der Versuche. Nach einer systematischen Erörterung der Symmetrieklassen (bzw., was ausreicht, der Kristallsysteme) kommt Verf. zu dem Schluß, daß nur die Systeme mittlerer Symmetrie die gewünschten Schlüsse erlauben. Dabei besteht die Möglichkeit der Verwechslung eines magnetischen Dipols mit einer Schar dazu senkrechter, komplanarer, elektrischer Quadrupole. Der Vergleich mit vorliegenden Experimenten bestätigt die theoretischen Erwartungen.

*Fues* (Breslau).

### Relativistische Quantentheorie:

● **London, F., et E. Bauer:** La théorie de l'observation en mécanique quantique. (Actualités scient. et industr. Nr. 775. Exposés de physique générale. Publiés par Paul Langevin. III.) Paris: Hermann & Cie. 1939. 51 pag. ffrs 25.—.

Es handelt sich um die Frage: Welche Aussagen macht die heutige Quantentheorie über Meßobjekte, Messungsergebnisse und den Vorgang der Messung. Die Darstellung setzt die Kenntnis des Formalismus der Quantentheorie voraus. — Inhalt: Übersicht über die Grundlagen der Quantenphysik. Vektorielle Darstellung. Statistik und Objektivität. „Gemeinge“ und „reine Fälle“. Der statistische Operator. Einige mathematische Eigenschaften der statistischen Matrizen. Der statistische Operator und die Thermodynamik. Die Irreduzibilität des reinen Falles. Statistik eines Systems, das aus zwei Systemen besteht. Reversible und irreversible Vorgänge. Messung und Beobachtung. Der Akt der Objektivierung. Ein Beispiel einer Messung. Irreduzibilität und reiner Fall. Übereinstimmung in der Wissenschaft und Objektivität.

*Bechert* (Gießen).

**Berthelot, André:** Énergies et périodes des désintégrations  $\alpha$ . J. Phys. Radium, VIII. s. 3, 17—28 (1942).

Verf. zeigt zunächst, daß die Berechnung der  $\alpha$ -Zerfallsenergien der Radiumreihe mittels der von v. Weizsäcker angegebenen halbempirischen Formel für die Massendefekte nur größenordnungsmäßig richtige Resultate liefert, auch den Gang der Zerfallsenergien in der Reihe nicht richtig wiedergibt. Er versucht deshalb umgekehrt, unter Zugrundelegung der gut bekannten  $\alpha$ -Energien Aussagen über die Bindungsenergien zu gewinnen. Dazu denkt er sich die  $\alpha$ -Energien als Fläche über



einer  $N-Z$ -Ebene aufgetragen und untersucht diese Fläche in verschiedenen Schnitten ( $N-Z = \text{konst.}$ ,  $Z = \text{konst.}$ ). Es ergibt sich, daß die Fläche ein Maximum aufweist bei  $Z = 84$ ,  $N = 128$ . Daraus wird geschlossen, daß der zugehörige Endkern  $Z = 82$ ,  $N = 126$  eine besonders stabile Konfiguration  $K_0$  darstellt. — Aus dem Unterschied der  $\alpha$ -Zerfallsenergien von Kernen, die sich nur um ein Proton bzw. ein Neutron unterscheiden, wird der Unterschied der Bindungsenergie des Protons bzw. Neutrons im Anfangs- und Endkern ermittelt. Die in  $K_0$  eingebauten Protonen und Neutronen erweisen sich als beträchtlich fester gebunden als die außerhalb angebauten Teilchen. — Durch Betrachtung von Zerfallsreihen, die aus zwei  $\beta$ -Umwandlungen und einer  $\alpha$ -Umwandlung bestehen, ergibt sich die Bindungsenergie von Gruppen von je 4 Neutronen in den betreffenden Ausgangskernen, daraus durch Vergleich mit entsprechenden Serien, die 2 Neutronen mehr enthalten, die Bindungsenergie von Gruppen von je 2 Neutronen. Zusammen mit den Energien von  $\alpha$ -Umwandlungen ergeben sich damit auch die Bindungsenergien von Gruppen von je 2 Protonen. Unter Hinzuziehung weiterer experimenteller Daten ( $\beta$ -Zerfallsenergien der Kerne Ra D und Ac B, die sich um ein Neutron unterscheiden) und einfacher Interpolationsregeln gelingt es schließlich, die Bindungsenergie des einzelnen Neutrons bzw. Protons zu bestimmen. Die erhaltenen Werte werden in einer Tabelle zusammengestellt. Sie gestatten unter anderem eine Deutung der nahezu gleichen  $\beta$ -Energien von Ac C'', Th C'' und Ra C'' als Umwandlung eines Neutrons innerhalb des Kernrumpfs  $K_0$  in das dort fehlende Proton, sowie in den beiden letzten Fällen eine Deutung der gleichzeitig auftretenden, nahezu gleich harten Gammastrahlen als Übergänge eines äußeren Neutrons in das in  $K_0$  entstandene Neutronenloch. — Die besondere Stabilität von  $K_0$  wird so gedeutet, daß hier der optimale Zusammenhang ( $N, Z$ ) gerade durch ganzzahlige Werte erfüllt ist. Eine weitere besonders stabile Konfiguration wird für  $Z = 86$ ,  $N = 134$  vermutet.

H. Volz (Berlin-Charlottenburg).

**Goeppert-Mayer, M.: Rare-earth and transuranic elements.** Phys. Rev., II. s. 60, 184—187 (1941).

Verf. zeigt das starke Absinken der Energie und das Schrumpfen der räumlichen Ausdehnung der  $4f$ - bzw.  $5f$ -Eigenfunktion beim Überschreiten der ungefähren Kernladungszahl  $Z = 57$  bzw.  $Z = 92$ . Dieses Vorkommnis bedeutet, daß von diesen Ordnungszahlen ab die  $4f$ - bzw.  $5f$ -Bahnen zu inneren Elektronenbahnen werden. Die erste Gruppe solcher Elemente im periodischen System sind die seltenen Erden; eine zweite analoge Gruppe scheint beim Uran zu beginnen. Als potentielle Energie zur Berechnung der Eigenfunktion und Bindungsenergie verwendet Verf. das statistische Thomas-Fermi-Potential des Atoms mit  $Z - 1$  Elektronen. Die gesamte potentielle Energie, welche in die Differentialgleichung für den Radialteil der  $f$ -Eigenfunktion (mit dem Drehimpuls  $l = 3$ ) eingeht, setzt sich aus diesem statistischen Potential, dem Zentrifugalpotential und dem Potential des  $f$ -Elektrons zusammen. Eine graphische Darstellung dieses Gesamtpotentials zeigt, daß es in zwei Radialbereichen negativ ist: 1) für große  $r$ , wo ein kleines, sehr flaches Minimum analog zum Wasserstoffatom besteht. Das Fermipotential ist dort schon klein, so daß dieses Minimum nur wenig von  $Z$  abhängt; 2) wenn  $Z$  zunimmt, entwickelt sich ein zweites Minimum bei kleinerem Kernabstand; es verschiebt sich mit wachsendem  $Z$  nach dem Atomkern hin, seine Tiefe wächst stark an und die Krümmung an der Minimalstelle nimmt zu. Eine qualitative Erörterung des tiefsten Energieniveaus und des Verhaltens der zugehörigen Eigenfunktion ergibt dann das eingangs beschriebene Verhalten der  $4f$ - bzw.  $5f$ -Eigenfunktionen, und eine eingehendere Berechnung der Bindungsenergien eines  $4f$ - bzw.  $5f$ -Elektrons in Abhängigkeit von der Kernladungszahl unterstützt diese Erörterung.

Kofink (Frankfurt a. M.).

**Jentschke, Willibald: Energien und Massen der Urankernbruchstücke bei Bestrahlung mit Neutronen.** Z. Physik 120, 165—184 (1943).

Die Bestrahlung erfolgt durch schnelle Neutronen. Die Massen der Uranbruch-

stücke gehören einer leichteren und einer schwereren Gruppe an. Die Massenzahlen der leichteren Bruchstücke liegen zwischen 79 und 114, Maximum bei 97, der schwereren zwischen 125 und 160, Maximum bei 142. Gleich schwere Bruchstücke kommen also auch bei Bestrahlung mit Neutronen, deren Energien bis etwa 10 MeV reichen, nicht vor. Die Messungen beziehen sich auf die Spaltung des häufigen Isotops 238. *Wirtz* (Berlin-Dahlem).

**Halpern, O., and T. Holstein:** On the passage of neutrons through ferromagnets. *Phys. Rev.*, II. s. **59**, 960—981 (1941).

Ein polarisierter Neutronenstrahl wird wegen der Wechselwirkung des Neutronenspins mit dem Magnetfeld beim Durchgang durch einen Ferromagneten depolarisiert. Eine Theorie dieser Depolarisation wird unter verschiedenen Annahmen über die Struktur des Ferromagneten aufgestellt und zur Untersuchung dieser Struktur zurechtgemacht für Einkristalle und vielkristalline Medien in verschiedenen Stadien der Magnetisierung. Der Einfluß auf die Durchlässigkeit der Medien für Neutronen wird untersucht. *F. Hund* (Leipzig).

**Halpern, O., M. Hamermesh and M. H. Johnson:** The passage of neutrons through crystals and polycrystals. *Phys. Rev.*, II. s. **59**, 981—996 (1941).

Der Einfluß der Kristallstruktur von Medien (Periodizität, Mosaikstruktur, vielkristalliner Bau, Temperaturbewegung) auf die Streuung von langsamen Neutronen wird theoretisch untersucht. Die Ergebnisse gestatten aus Experimenten Schlüsse über die Ausdehnung der mikrokristallinen Bereiche und die Wirkungsquerschnitte von Isotopen zu ziehen. Insbesondere werden die Polarisationsverhältnisse beim Durchgang durch ferromagnetische Stoffe und die Schwierigkeiten der Deutung der Experimente untersucht. *F. Hund* (Leipzig).

**Clay, J.:** The extensive cosmic ray showers and bursts. *Physica*, Haag **9**, 897—907 (1942).

Es werden ausgedehnte Schauer durch Mehrfachkoinzidenzen nebeneinanderliegender Gruppen parallelgeschalteter Zählrohre beobachtet. Während die Zahl der Mesonenkoinzidenzen entsprechend der Zählrohrzahl in den einzelnen Gruppen wächst, bleibt die der Elektronenkoinzidenzen hinter der Erwartung zurück. Verf. deutet die Erscheinung durch Elektronenanhäufungen um die mit stetiger Dichte verteilten Mesonen des Schauers. Die mittlere Zahl der Elektronen pro Anhäufung und pro Meson (wie besonders gezeigt wird), beträgt 6. Die mittlere Energie aller Schauerteilchen soll  $10^{13}$  eV nicht übersteigen. Die Anzahl der Schauer sei mit einem Primärspektrum  $N \sim E^{-2.9}$  verträglich. *Fritz Bopp* (Breslau).

**Ma, S. T.:** Deviation from the Coulomb law for the proton. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **36**, 441—445 (1940).

Das ein Proton umgebende Mesonfeld bedingt eine Abweichung vom Coulombschen Gesetz in der Wirkung des Protons auf eine andere Ladung (Fröhlich, Heitler, Kahn, dies. Zbl. **21**, 188). Hier werden die Abänderungen angegeben, die durch die Heitlersche Annahme höherer Protonzustände mit Ladungen  $N_e$  ( $N_e \neq 1$ ) entstehen. *F. Hund* (Leipzig).

**Costa de Beauregard, Olivier:** Sur dix relations conséquences des équations de Dirac. *C. R. Acad. Sci., Paris* **214**, 818—820 (1942).

Es wird eine Übersicht über die Gleichungen zwischen den verschiedenen Tensoren der Diracschen Theorie gegeben und auf eine bemerkenswerte Symmetrie dieser Gleichungen hingewiesen. *Fritz Bopp* (Breslau).

**Band, William:** On Flint's five-dimensional theory of the electron. *Philos. Mag.*, VII. s. **29**, 548—552 (1940).

Ein Vorschlag, die Spekulationen von Flint über eine fünfdimensionale Theorie des Elektrons so abzuändern, daß die fünfte Koordinate als Drehwinkel der Spinbewegung erscheint. *Bechert* (Gießen).



**Iskraut, Richard:** Bemerkungen zum Energie-Impuls-Tensor der Feldtheorien der Materie. Z. Physik 119, 659—676 (1942).

Das Verfahren von Belinfante zur Symmetrisierung des kanonischen (Energie-Impuls-) Tensors wird in aller Vollständigkeit diskutiert und dabei ein einfacher und wichtiger Sonderfall herausgestellt. Die Zerlegung des Drehimpulstensors und der zugehörigen dreistufigen Tensordichte in Bahn- und Spinanteil wird kritisch untersucht und nur für die Integrale als sinnvoll erkannt.

Fritz Bopp (Breslau).

**Proca, Alexandre:** Sur la théorie des particules matérielles et en particulier sur les électrons de spin 1/2. C. R. Acad. Sci., Paris 214, 606—607 (1942).

Verf. will die Dirac-Gleichung des Elektrons durch Einführung eines Zusatzgliedes verallgemeinern. Die neue Gleichung lautet

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\lambda x_\sigma m^{\sigma\mu} \partial_\mu \psi + \frac{mc}{\hbar} \psi = 0,$$

wobei das neue Glied in der Mitte der Gleichung steht. Die Operatoren  $\gamma^\mu$  sind die üblichen von Dirac eingeführten Matrizen. Außerdem ist  $m^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$  gesetzt.

G. C. Wick (Rom).

**Synge, J. L.:** A modified electromagnetic energy-tensor. Trans. roy. Soc. Canada, III. s. 34, 1—27 (1940).

L'aut. associe d'abord à toute particule son quadrivecteur de quantité de mouvement  $M^\mu(s)$  considéré comme fonction de son temps propre  $s$ . Par contre, il n'admet pas de champ électromagnétique  $f^{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ , sauf celui créé par les particules. Il en forme de la manière conventionnelle le tenseur d'énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}(x)$  en prenant les champs retardés et en ne tenant compte que des «termes mixtes».  $T^{\mu\nu}$  devient ainsi infini comme  $R^{-2}$  aux environs des lignes d'univers des particules et disparaît comme  $R^{-2}$  à l'infini (si, dans le passé lointain, des accélérations ont toujours existé). — Le but du travail est de trouver une quantité  $P^\mu$  qui puisse être interprétée comme la quantité de mouvement de «particules + champs retardés». Il propose de la définir par l'intégration sur la surface (tridimensionnelle) d'un cône de lumière dirigé vers le futur  $\int T^{\mu\nu} d\sigma_\nu$ , plus les quadrivecteurs  $M_{(i)}^\mu$  de toute particule  $i$  au «moment» où sa ligne d'univers pénètre dans ce cône. Il démontre 1° que cette intégrale existe, 2° qu'en partant de l'hypothèse de continuité

$$M^\mu(s + ds) - M^\mu(s) + \oint_\Sigma T^{\mu\nu} d\sigma_\nu = 0$$

(la surface tridimensionnelle fermée  $\Sigma$  est le petit cylindre de Dirac (ce Zbl. 23, 427) qui enferme l'élément  $ds$  de la ligne d'univers  $x^\mu = q^\mu(s)$  borné par deux cônes de lumière) amène à la loi  $dM^\mu/ds = e f^{\mu\nu} dq_\nu/ds$  (où  $f^{\mu\nu}$  est le champ créé par les autres particules) sans freinage de radiation, 3° que pour deux particules dont l'une est beaucoup plus lourde que l'autre (proton + électron) la quantité  $M_{(1)}^4 + M_{(2)}^4 + \int T^{4\nu} d\sigma_\nu$  (intégrée sur le cône de lumière émergeant d'un événement de la ligne d'univers d'un observateur au repos par rapport au proton) vaut en effet  $m_{(1)}c^2 + m_{(2)}c^2(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} + e_{(1)}e_{(2)}(4\pi a)^{-1}$  ( $a$  est la distance spatiale entre  $m_{(1)}$  et  $m_{(2)}$ ).

v. Stueckelberg (Genf).

**McCrea, W. H.:** Quaternion analogy of wave-tensor calculus. Philos. Mag., VII. s. 30, 261—281 (1940).

Eddington macht in seiner relativistischen Theorie des Protons und Elektrons (Cambridge 1936; dies. Zbl. 15, 422) ausgiebigen Gebrauch von der Rechnung mit seinen  $E$ -Zahlen, die er den Wellentensorkalkül nennt. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Quaternionenalgebra der  $E$ -Zahl-Algebra auf einer einfacheren Stufe analog ist. Zu den Sätzen der Quaternionenalgebra gibt es kompliziertere Gegenstücke in der  $E$ -Zahl-Algebra. Die Arbeit beschränkt sich auf diese rein mathematische Gegenüberstellung.

Bechert (Gießen).



**Flint, H. T.:** The theory of the electric charge and the quantum theory. 2. Philos. Mag. VII. s. 29, 417—433 (1940).

Erweiterte Darstellung der Gedanken von Flints fünfdimensionaler Wellenmechanik. *Bechert* (Gießen).

**Stueckelberg, E. C. G.:** Le rôle de l'invariance spinorielle et l'invariance de jauge dans un nouveau principe fondamental. (Tag. d. Schweiz. Physik. Ges., Sion, Sitzg. v. 30. VIII. 1942.) Helv. phys. Acta 15, 513—515 (1942).

**Fahmy, M.:** The idea of minimum proper time, and some consequences of it. Philos. Mag., VII. s. 30, 331—339 (1940).

Aus einer Reihe von willkürlichen Annahmen, die eine Ergänzung zu Flints Spekulationen zur fünfdimensionalen Wellenmechanik bilden sollen, zieht Verf. Schlüsse auf das Verhalten von Teilchen, die sich nach relativistisch-mechanischen Gesetzen (ohne Quantentheorie) bewegen. Er übernimmt dazu den Gedanken einer kleinsten Zeiteinheit und schließt auf kleinste Abstände, die bei der Keplerschen Kreisbewegung ungleich geladener Teilchen umeinander auftreten sollen. *Bechert* (Gießen).

**Petiau, Gérard:** Sur les équations d'ondes des corpuscules à spins entiers. C. R. Acad. Sci., Paris 214, 610—612 (1942).

## Astrophysik.

**Schürer, Max:** Die Dynamik der Sternsysteme. Mitt. naturforsch. Ges. Bern 1940, 56—75 (1941).

Die Arbeit gibt nach einer Aufzählung der von der Theorie darzustellenden Beobachtungsergebnisse (differentielle Rotationseffekte; Lage des dreiachsigen Geschwindigkeitsellipsoids zum System; Asymmetrie der Geschwindigkeitsverteilung und gegebenenfalls Spiralstruktur des Systems) und nach Aufstellung der Grundgleichungen eine übersichtliche Darstellung der verschiedenen bisher angewandten Lösungsmethoden, die durch folgende Stichworte und durch die Namen der entsprechenden Autoren charakterisiert werden können: 1. Zurückführung der Grundgleichung, die sich im Falle der Stationarität auf das Verschwinden des Poissonschen Klammerausdrucks reduziert, auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (Jeans; Lindblad); 2. Einführung eines bestimmten Ansatzes für die Verteilungsfunktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten (Oort; Eddington); 3. Aufstellen eines bestimmten Kraftansatzes, der die Verfolgung individueller Sternbahnen ermöglicht (Bottlinger); 4. Untersuchung der Relativbewegung in einem rotierenden Koordinatensystem durch Reihenentwicklung des Potentials (Lindblad; Chandrasekhar). — Es wird gezeigt, daß die verschiedenen Methoden, von einigen ungelösten Fragen abgesehen, im wesentlichen auf die gleichen Ergebnisse führen und daß die Hauptschwierigkeit in der aus den Beobachtungen folgenden Existenz eines dreiachsigen Geschwindigkeitsellipsoids liegt. *Wempe* (Jena).

**Coutrez, R.:** L'équilibre dynamique des systèmes stellaires. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 27, 295—308 (1941).

In engem Anschluß an Th. de Donder: Théorie nouvelle de la mécanique statistique (Paris 1938; dies. Zbl. 19, 360) leitet der Verf. einen Ausdruck für die Verteilungsfunktion  $f_i(q_i^{\lambda}, p_i^{\lambda}, t)$  der Koordinaten und Impulse der Sterne der Masse  $m_i$  in einem Sternsystem ab, das sich im „dynamischen Gleichgewicht“ ( $df_i/dt = 0$ ) befindet. Statistisch-thermodynamische Forderungen führen auf

$$f_i = f_i \left( \frac{H_i - \mu_i'}{\sigma_i^2} \right),$$

wo  $H_i$  die Hamilton-Funktion für die Bewegung eines Einzelsternes unter der Gesamtwirkung der übrigen,  $\mu_i'$  das „chemische Potential“ pro Partikel (vgl. de Donder, l. c.),  $\sigma_i^2$  eine Konstante bedeutet. Andererseits verlangt die Forderung des dynamischen Gleichgewichts die alleinige Abhängigkeit des  $f_i$  von den Bewegungsinvarianten



(d. h. von den zeitfreien Integralen) der Bewegungsgleichungen des Einzelsterns:  $H_i$  (Energie) und  $p_i^2$  (Drehimpuls, wenn das Potentialfeld axialsymmetrisch um die  $q^3$ -Achse,  $q^1$  als Achsenabstand,  $q^2$  als Azimut angenommen wird). Somit bleibt  $\mu'_i$  eine Funktion von  $p_i^2$  allein. Nimmt man zusätzlich an, daß  $f_i = K_i \exp\left(\frac{\mu'_i - H_i}{\sigma_i^2}\right)$  ( $K_i = \text{const}$ ) und daß  $\mu'_i = \sum_{s=0}^{\infty} a_{is}(p_i^2)^s$  ( $a_{is} = \text{const}$ ) eine ganze Funktion des Dreh-

impulses ist, so bekommt man bereits mit den linearen und quadratischen Gliedern der Reihe eine Erklärung für die sog. differentielle Rotation und die ellipsoidische Verteilung der Geschwindigkeiten. — (Die Resultate der Arbeit gehen über Bekanntes nicht hinaus, nur ist der Zugang teilweise ungewöhnlich. Ref.) *Heckmann.*

**Kienle, H.:** Die empirischen Grundlagen des Masse-Leuchtkraft-Gesetzes. *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **20**, 89—120 (1942).

Es werden behandelt: Die theoretische Beziehung zwischen Leuchtkraft, Masse, Radius und chemischer Zusammensetzung der Sterne; die beobachtbaren Zustandsgrößen, speziell Masse, Radius, absolute Leuchtkraft und effektive Temperatur. Es folgen Wiedergaben der Zusammenstellung von Kuiper sowie der statistischen Untersuchungen von Russell und Moore. Eine Zusammenfassung aller empirischen Daten führt zu der Beziehung  $L$  (Leuchtkraft)  $\sim M^{3.5}$  oder  $M^{3.6}$  ( $M$  Masse), der sich nur die weißen Zwerge und die Trümlerschen Sterne extrem hoher Masse nicht einfügen. Allerdings sind die Abweichungen von der mittleren Beziehung besonders für die Unterriesen und Riesen merklich.

*L. Biermann (Babelsberg).*

**Hoyle, F., and R. A. Lyttleton:** On the physical aspect of accretion by stars. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **36**, 424—437 (1940).

Verff. haben schon in früheren Arbeiten die Auffassung vertreten, daß die Entwicklung, besonders der Sterne großer Masse durch Massenaufnahme interstellarer Materie wesentlich beeinflußt wird (s. dies. Zbl. **23**, 93 und **25**, 382, 383). Hierzu wird angenommen, daß diese Sterne wenigstens zeitweise Massen interstellarer Materie der Dichte  $5 \cdot 10^{-21} \text{ g cm}^{-3}$  oder mehr mit einer Relativgeschwindigkeit von nur  $\approx 5 \text{ km/sec}$  durchschreiten. In der vorliegenden Arbeit wird vor allem der Einfluß der Moleküle im interstellaren Raum auf das Problem untersucht. Diese sollten (falls nicht allzu selten vorhanden) die Temperatur der interstellaren Wolke weit unter die Farbtemperatur der Sterne herabdrücken, da ein Austausch zwischen der kinetischen Energie der freien Elektronen und der inneren Energie der Moleküle, die dann abgestrahlt wird, stattfindet. Die Moleküle werden auch in der Nähe des einfangenden Sterns erst zum geringen Teil dissoziiert werden, bis sie die kritische Einfangentfernung erreichen. Ferner finden Verff., daß der Strahlungsdruck auf den atomaren Wasserstoff vernachlässigt werden darf. — (Für die fraglichen Sterne besteht aus energetischen Gründen nur die Alternative, eine Bildung in neuerer Zeit, vor  $10^7$ — $10^8$  Jahren, und damit wohl eine ständige Neubildung anzunehmen, die ebenfalls Stellen erheblich überdurchschnittlicher Dichte erfordert. Andererseits hat schon die bisherige Diskussion in der Literatur starke Bedenken gegen die Auffassungen der Verff. ergeben. Ref.)

*L. Biermann (Babelsberg).*

**Biermann, L.:** Über den Typus der Konvektion in Instabilitätszonen. *Z. Astrophys.* **22**, 65—69 (1942).

Zur Entscheidung der Frage, ob in den im Sterninneren auftretenden Instabilitätszonen zelluläre oder nichtstationäre Konvektion anzunehmen ist, wird die für das Auftreten zellulärer Konvektion charakteristische, von Lord Rayleigh und Jeffreys angegebene dimensionslose Zahl genauer diskutiert und zu dem für das Auftreten von Turbulenz in einer Strömung maßgebenden Reynoldsschen Kriterium in Beziehung gesetzt. Die bisherigen Experimentaluntersuchungen an thermisch instabilen Schichten reichen zu einer Entscheidung über den Charakter der nichtstationären Konvektion noch nicht aus.

*Wempe (Jena).*



**Armellini, Giuseppe: Sopra l'età dei pianeti e sopra l'incremento dei parametri delle loro orbite, a causa del termine cosmogonico.** Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 229—235 (1942).

Verf. hat früher durch asymptotische Betrachtungen gezeigt, daß der Parameter der Planetbahnen allmählich gegen eine Grenze zunimmt, welche gut hundertmal größer als der ursprüngliche Wert sein könne. Neulich hat aber Zagar in Bologna behauptet, daß, obwohl er die Genauigkeit der asymptotischen Beweisführung des Verf. anerkenne, doch ansehen müsse, daß in Praxis ein solcher Zuwachs so langsam vor sich gehe, daß die Änderung während des ganzen Lebenszeitraumes des Planetensystems doch ganz unmerkbar bleibe, besonders für die fernsten Planeten, z. B. für Neptun. Also hätte man auch nur äußerst langsame Änderungen der Inklination zu erwarten (denn diese Phänomene sind ja miteinander verbunden). Zagar gibt für den kosmogonischen Koeffizient  $\varepsilon$  den sehr kleinen Wert  $4 \cdot 10^{-17}$ , fügt aber hinzu, daß auch ein Wert 100-jah sogar 1000mal so groß nichts an seinen Folgerungen ändere. Vorliegende Note des Verf. stellt sich als Hauptaufgabe, diese Schwierigkeiten zu erörtern, er beschränkt sich aber auf eine Untersuchung der Parameteränderung. — Es wird gezeigt, daß Zagars theoretische Deduktionen zu derselben Formel  $a = (C + \beta t)^{2/5}$  führt, welche vom Verf. schon im Mai 1940 aufgestellt worden war und gegen welche Zagar verschiedene Einwendungen erhob. — Zagar findet an einem numerischen Beispiel, wo er als Zeitraum  $10^{12}$  Jahre betrachtet, daß, wenn man den jetzigen Wert des Parameters der Neptunbahn zu 6471,3 Sonnenradien setzt, als Wert,  $10^{12}$  Jahre vor unserer Zeit, 6470,9 herauskommt — also kaum ein merkbarer Unterschied! Hieraus gehe nach Zagar hervor, wie schwierig sich die kosmogonische Theorie des Verf. erklären lasse. Verf. betrachtet jetzt zwei Fälle: a) Ursprung aller Planeten aus der Sonnenmasse, b) Ursprung der ferneren Planeten durch „Gefangennahme“ von der Sonne. Eine Folge der ersteren Hypothese ist natürlich u. a., daß das ursprüngliche Bewegungsmengemoment der Sonne gleich demjenigen des ganzen jetzigen Planetensystems sei. Dies gäbe für das Bewegungsmengemoment der Sonne,  $K$ , einen Wert ungefähr 9mal kleiner als das zulässige Minimum (rein mechanisch betrachtet). Für  $\varepsilon$  ist der maximal zulässige Wert  $4 \cdot 10^{-14}$  C. G. S., um dessen Störungen vernachlässigen zu können. — Nach der Zagarschen Gleichung bekommt man jetzt für den ursprünglichen Parameter Neptuns,  $p_0$ , indem man für  $K$  den Zagarschen Wert, für  $\varepsilon$  denjenigen des Verf. einführt:

$$p_0^4 = (6471,3)^4 - 3,8813 \cdot 10^{15} < 0,$$

d. h. vor  $10^{12}$  Jahren wäre Neptun noch nicht aus der Sonnenmasse ausgeschleudert. Wenn man infolgedessen den betrachteten Zeitraum um ungefähr die Hälfte reduziert (z. B.  $t - t_0 = 0,451 \cdot 10^{12}$ ), bekommt man  $p_0 = 1$ , d. h. der Parameter wäre im Verhältnis 6471:1 geändert, also Neptun wäre dann aus der Sonne ausgeschleudert. Es sei demnach, behauptet der Verf., vollständig inexakt, zu erklären, daß auch mit einem Wert von  $\varepsilon$  (dem kosmogonischen Koeffizient) tausendmal größer als denjenigen von Zagar die Änderung des Parameters in  $10^{12}$  Jahren unmerkbar wäre. Hierbei muß aber auch ergänzend in Betracht gezogen werden, daß die Sonne ein Energie ausstrahlender, also allmählich Energie und somit Masse verlierender Körper ist, ein Umstand, der den Zeitraum auf weniger als  $10^{11}$  Jahre reduziert. Wenn man eben solche Umstände voraussetzt, welche am meisten für die Hypothese des Verf. ungünstig wären, komme man, seiner Meinung nach, zu Zeiträumen von der Größenordnung  $10^{13}$  bis  $10^{14}$  Jahre für das „Alter“ unseres Planetensystems — und eine solche Möglichkeit könne man, meint er, doch auf keine Weise verleugnen. — b) Der Fall: Ursprung der ferneren Planeten durch „Gefangennahme“ von der Sonne würde indessen zu einem viel kürzeren Alter des Planetensystems führen. Es wäre dann das Alter des ganzen Systems gleich dem Alter Saturns. — Verf. schließt diesen „wissenschaftlichen Streit“ mit der Überzeugung, daß seine kosmogonische Hypothese in die Reihe der andern, welche die Wissenschaft in dieser Beziehung schon besitzt, verdienen aufgenommen zu werden.

Hans S. Jelstrup (Oslo).<sub>oo</sub>